

# **SOBRE A AGREGAÇÃO DE VARIÁVEIS ECONÔMICAS E DE ÍNDICES DE LASPEYRES E PAASCHE\***

*Duílio de Ávila Bémi\*\**

## **Introdução**

A obtenção de valores de Todos a partir dos valores de suas Partes, ou, em outras palavras, a agregação de variáveis econômicas<sup>1</sup>, é uma tarefa que pode reservar surpresas ao estudioso. O senso comum sugere que a agregação de valores nominais, ou a preços correntes, pode ser resolvida com simples operações de adição, uma vez

---

\* Este trabalho foi apresentado na Seção Especial sobre Índices de Preços ao Consumidor, promoção conjunta da ANPEC e SBE, a 6 de dezembro de 1985, em Vitória-ES. Muitos colegas têm créditos a receber quanto aos méritos que este trabalho virtualmente apresenta, uma vez que meu cotidiano de trabalho com eles permitiu-me receber críticas e sugestões, as quais resultaram no presente artigo. É fundamental destacar os nomes de Carlos Roberto Barbieri Nunes, Edgar Augusto Lanzer, Karen Stallbaun Conceição, Luiz Augusto Estrella Faria, Pedro Silveira Bandeira, Sérgio Fischer e Yara Saldanha Prange. Agradeço, particularmente, a Adalberto Alves Maia Neto que, por ocasião da discussão de meu artigo (Bémi, 1984), levantou a questão de que problemas semelhantes aos lá discutidos ocorrem também no caso de cálculo de taxas de crescimento; investigando essa idéia, cheguei aos atuais resultados. Finalmente, registro meu preito de gratidão a Emerson Guilherme Ritter e à Equipe de Mecanografia da FEE, cuja datilografia eliminou o componente tóxico de minha "sopa de letrinhas".

\*\* Economista da Fundação de Economia e Estatística e professor do Departamento de Economia da UFRGS.

<sup>1</sup> Deve ficar claro que o problema de agregação que aqui estamos discutindo é o usual na literatura sobre números índices, ou seja, trata-se basicamente da determinação de parâmetros para equações identidade. Não estamos, portanto, preocupados com equações igualdade (de comportamento), como é o caso tratado por Theil (1954), intitulado de "agregação perfeita". Fox (1973), no Capítulo 14, alertou-me para esse problema e me direcionou à obra citada de Theil e à de Allen (1956), cujo Capítulo 20 retoma as discussões da problemática levantada por Theil.

que os valores correntes de diferentes variáveis econômicas são perfeitamente homogêneos entre si para cada período de tempo. Assim, a razão entre os valores correntes de dois anos quaisquer informa quanto cresceu o produto de preços  $X$  quantidades de um desses anos relativamente aos preços  $X$  quantidades do outro. Entretanto, examinadas em profundidade, essas simples operações de adição estariam representando apenas um caso entre pelo menos mais dois outros possíveis, a julgar pelas experiências do economista que visitou o reino de Belíndia<sup>2</sup>. Qual deles deve ser adotado como certo?

Se há complicações na agregação de Partes homogêneas (pois medidas em valores monetários correntes), resultando em um Todo “não-muito-bem-identificado”, quando se trata de agregar variáveis visivelmente heterogêneas, tais como quantidades (quilos, toneladas, litros, dúzias, etc.) ou preços (Rr\$ por quilos, toneladas, litros, dúzias, etc., onde Rr\$ são rúpias reais, a unidade monetária de Belíndia), os problemas da agregação magnificam sobremaneira seu grau de complexidade. A solução tradicional para esses problemas consiste na construção de índices de quantidades ou de preços. Como nem o próprio índice ideal de Fisher é perfeito, percebemos que qualquer agregado de variáveis apresenta algum erro<sup>3</sup>. Mas o que nos interessa mais de perto é, mesmo admitindo que os índices das Partes não contenham erros, como chegar aos índices do Todo. Também aqui o senso comum sugere que uma forma de obter valores monetários do Todo a preços constantes consiste em tomar os valores das Partes e deflacioná-los com índices de preços adequados e somar os valores “reais” das Partes. Infelizmente, também nesse caso, um exame mais acurado da questão impede que se adote essa prática. Mostraremos adiante, com o uso de um exemplo, que a taxa de crescimento do valor real obtido com esse método depende da simples escala do deflator usado para transformar os valores correntes das Partes em valores constantes. Isso ocorre, pois ao se mudar a escala de um ano a outro está-se substituindo o conjunto de preços de um ano pelo de outro, na hipótese de que os índices sejam perfeitamente circulares no tempo. Resumindo, ao se deslocar o centro da escala de um índice de um ano a outro, usando uma regra de três simples, passa-se a trabalhar com um novo conjunto de preços, o que não garante a manutenção das taxas de crescimento de um caso e do outro.

<sup>2</sup> Conforme Bacha (1976, p. 57), Belíndia é “(. . .) um reino situado num longínquo rincão a meio caminho entre o Ocidente e o Oriente”. Conversando com o rei, um economista visitante apresentou-lhe os “mistérios dos juros compostos e das taxas de crescimento de produtos e preços”. Incontinenti, o monarca “(. . .) o contratou para estimar a taxa de crescimento de Belíndia”. Desse encontro, nasceu a magistral fábula de Bacha.

<sup>3</sup> E não existe solução para essa problemática. Acentua Bumstein (1963, p. 62), a esse respeito, que, como os preços “medem” gostos e hábitos e estes mudam e ainda aparecem e desaparecem produtos ao longo do tempo, as medidas do poder aquisitivo da moeda — os índices de preços — são concebíveis “em um mundo completamente estático”, o que por si só demonstra a heterogeneidade e artificialidade características de qualquer índice de preços ou de quantidades.

O tratamento usual na literatura para esse tipo de problema não se detém exatamente nas questões aqui esmiuçadas<sup>4</sup>. Bacha questiona os critérios de ponderação das Partes. Os demais autores sugerem que os índices das Partes devem ser agregados com as ponderações correspondentes ao ano-base. Nosso objetivo com o presente trabalho consiste em demonstrar que esses critérios de ponderação valem exclusivamente para o caso de índices estruturados com o critério de Laspeyres, enquanto os índices de Paasche devem ser agregados com as ponderações do ano final. Além disso, pretendemos mostrar que a prática de agregar valores reais por adição leva a resultados não-unívocos, conforme se centre a escala do deflator em um ou outro ano.

O problema adiante discutido considera um Todo constituído por duas ou mais Partes — por exemplo, renda: consumo mais investimento; renda do país: soma das rendas de suas regiões; renda de uma organização de países: soma das rendas de cada um deles; oferta de moeda: moeda manual mais escritural; renda anual: soma das rendas trimestrais ou mensais; valor bruto da produção: consumo intermediário mais valor adicionado; oferta (demanda) global: renda interna mais impostos indiretos menos subsídios mais depreciação mais saldo do balanço de transações correntes; e muitas outras.

Convém, para concluir, deixarmos claro que entendemos por ano-base aquele cujas quantidades são adotadas como ponderadoras dos preços para a construção de índices de preços; simetricamente, no caso de índice de quantidades, o ano-base é aquele para o qual se dispõe das informações originais dos preços. Por seu turno, entendemos por centro da escala de um índice o período em que o valor do índice é igual à unidade (ou a 100, se quiséssemos); naturalmente, nada obriga que o ano-base também seja a sede do centro de escala. Nos exemplos empíricos, sequer discutimos qual a base dos índices (possivelmente seriam índices de base móvel) e centraremos a escala dos índices nos anos 1, 3 e 5, sendo que as conclusões pertinentes ficariam reforçadas, caso adotássemos também os demais anos.

O presente trabalho organiza-se do seguinte modo. Na Seção 1, apresenta-se o conjunto de símbolos e definições que serão usadas ao longo do texto; nela também se apresentam os dados básicos de um exemplo fictício. A Seção 2 retoma o proverbial caso de Belíndia e, usando os dados da Seção 1, mostra que os critérios de ponderação dos setores a serem agregados levam a taxas de crescimento diversas. Na Seção 3, retomaremos um dos critérios de agregação do produto de Belíndia (o da “riqueza”) e o aplicaremos para a agregação de valores reais, quando veremos que as taxas de crescimento também dependem do ano em que se centra a escala do deflator. Na Seção 4, mostraremos que as agregações das Partes de modo a formarem seus respectivos Todos devem ser feitas a partir dos índices de quantidades ou de preços e podem ser feitas também para o caso de índices encontrados para os dados do Quadro 1, quando lançamos mão das fórmulas desenvolvidas na Seção 4. Finalmente, as tradicionais conclusões são substituídas por um resumo e indicação quanto a rumos futuros da pesquisa nessa área.

---

<sup>4</sup> Desejo destacar os trabalhos de Bacha (1976), Figueiredo (1981), Fischer (1927), Fox (1973), Homer (1971), Karmel & Polasek (1972) e ONU (1979).

# 1 — Como se fosse um glossário

Nesta seção, apresentamos as definições e os símbolos necessários ao encaminhamento do problema, bem como os “dados imaginários originais”, os quais serão utilizados nas Seções 2, 3 e 5. Consideraremos um Todo  $Z$  constituído por duas Partes,  $X$  e  $Y$ .<sup>5</sup>

Há quatro expressões básicas:

(I)  $\Sigma p_t^Z q_t^Z = \Sigma p_t^X q_t^X + \Sigma p_t^Y q_t^Y$  — valor da variável do Todo  $Z$  no ano  $t$ , aos preços correntes do próprio ano  $t$ ; portanto

(II)  $\Sigma p_{t-1}^Z q_{t-1}^Z = \Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X + \Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y$  — valor da variável do Todo  $Z$  no ano  $t-1$  aos preços correntes do próprio ano  $t-1$ ; ademais

(III)  $\Sigma p_{t-1}^Z q_t^Z = \Sigma p_{t-1}^X q_t^X + \Sigma p_{t-1}^Y q_t^Y$  — valor da variável do Todo  $Z$  no ano  $t$  aos preços do ano  $t-1$ ; e finalmente

(IV)  $\Sigma p_t^Z q_{t-1}^Z = \Sigma p_t^X q_{t-1}^X + \Sigma p_t^Y q_{t-1}^Y$  — valor da variável do Todo  $Z$  no ano  $t-1$  aos preços do ano  $t$ .

As expressões que seguem vêm na ordem em que aparecem no texto:

(V)  $V_{t-1,t}^{Z,L} = \frac{\Sigma p_t^X q_t^X}{IPL_t^X} + \frac{\Sigma p_t^Y q_t^Y}{IPL_t^Y}$  — valor da variável do Todo  $Z$  no ano  $t$  aos pre-

ços constantes do ano  $t-1$ , uma vez que os deflatores utilizados são os índices de preços de Laspeyres das Partes  $X$  e  $Y$  (adiante definidos) no ano  $t$  com base no ano  $t-1$ ,

(VI)  $V_{t-1,t}^{Z,P} = \frac{\Sigma p_t^X q_t^X}{IPP_t^X} + \frac{\Sigma p_t^Y q_t^Y}{IPP_t^Y}$  — valor da variável do Todo  $Z$  no ano  $t$  aos pre-

ços constantes do ano  $t$ , uma vez que os deflatores utilizados são os índices de preços de Paasche das Partes  $X$  e  $Y$  (adiante definidos) no ano  $t$  como base no ano  $t-1$ .

(VII)  $IV_t^Z = \frac{\Sigma p_t^X q_t^X + \Sigma p_t^Y q_t^Y}{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X + \Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y}$  — índice do valor do Todo  $Z$  no ano  $t$

relativamente ao ano  $t-1$ ,

<sup>5</sup> Os procedimentos abaixo desenvolvidos comportam, “mutatis mutandis”, qualquer número finito de partes. Deixo pendente a questão sobre o número mínimo de mercadorias que deve integrar os índices das partes sem enviesá-los desmesuradamente.

(VIII)  $IV_t^X = \frac{\Sigma p_t^X q_t^X}{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X}$  — índice de valor da Parte X no ano t relativamente ao ano t-1,

(IX)  $IV_t^Y = \frac{\Sigma p_t^Y q_t^Y}{\Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y}$  — índice de valor da Parte Y no ano t relativamente ao ano t-1,

(X)  $A_t = \frac{\Sigma p_t^X q_t^X}{\Sigma p_t^X q_t^X + \Sigma p_t^Y q_t^Y}$  — participação unitária da Parte X no Todo Z aos preços correntes do ano t,

(XI)  $1-A_t = \frac{\Sigma p_t^Y q_t^Y}{\Sigma p_t^X q_t^X + \Sigma p_t^Y q_t^Y}$  — participação unitária da Parte Y no Todo Z aos preços correntes do ano t,

(XII)  $IQL_t^Z = \frac{\Sigma p_{t-1}^X q_t^X + \Sigma p_{t-1}^Y q_t^Y}{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X + \Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y}$  — índice de “quantum” de Laspeyres do Todo Z para o ano t com base no ano t-1,

(XIII)  $IQL_t^X = \frac{\Sigma p_{t-1}^X q_t^X}{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X}$  — índice de “quantum” de Laspeyres da Parte X para o ano t com base no ano t-1,

(XIV)  $IQL_t^Y = \frac{\Sigma p_{t-1}^Y q_t^Y}{\Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y}$  — índice de “quantum” de Laspeyres da Parte Y para o ano t com base no ano t-1,

(XV)  $IQP_t^Z = \frac{\Sigma p_t^X q_t^X + \Sigma p_t^Y q_t^Y}{\Sigma p_t^X q_{t-1}^X + \Sigma p_t^Y q_{t-1}^Y}$  — índice de “quantum” de Paasche do Todo Z para o ano t com base no ano t-1,

$$(XVI) IQP_t^X = \frac{\sum p_t^X q_t^X}{\sum p_t^X q_{t-1}^X} - \text{índice de "quantum" de Paasche da Parte X para o ano t com base no ano t-1,}$$

$$(XVII) IQP_t^Y = \frac{\sum p_t^Y q_t^Y}{\sum p_t^Y q_{t-1}^Y} - \text{índice de "quantum de Paasche da Parte Y para o ano t com base no ano t-1,}$$

$$(XVIII) IPL_t^Z = \frac{\sum p_t^X q_{t-1}^X + \sum p_t^Y q_{t-1}^Y}{\sum p_{t-1}^X q_{t-1}^X + \sum p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y} - \text{índice de Preços de Laspeyres do}$$

Todo Z para o ano t com base no ano t-1,

$$(XIX) IPL_t^X = \frac{\sum p_t^X q_{t-1}^X}{\sum p_{t-1}^X q_{t-1}^X} - \text{índice de preços de Laspeyres da Parte X para o ano t com base no ano t-1,}$$

$$(XX) IPL_t^Y = \frac{\sum p_t^Y q_{t-1}^Y}{\sum p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y} - \text{índice de preços de Laspeyres da Parte Y para o ano t com base no ano t-1,}$$

$$(XXI) IPP_t^Z = \frac{\sum p_t^X q_t^X + \sum p_t^Y q_t^Y}{\sum p_{t-1}^X q_t^X + \sum p_{t-1}^Y q_t^Y} - \text{índice de preços de Paasche do Todo Z para o ano t com base no ano t-1,}$$

$$(XXII) IPP_t^X = \frac{\sum p_t^X q_t^X}{\sum p_{t-1}^X q_t^X} - \text{índice de preços de Paasche da Parte X para o ano t com base no ano t-1,}$$

$$(XXIII) IPP_t^Y = \frac{\sum p_t^Y q_t^Y}{\sum p_{t-1}^Y q_t^Y} - \text{índice de preços de Paasche da Parte Y para o ano t com base no ano t-1,}$$

$$(XXIV) B = \frac{\sum p_t^X q_t^X}{\sum p_{t-1}^X q_{t-1}^X + \sum p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y} - \text{razão entre o valor da variável da Parte X no ano t, aos preços do ano t, e o valor da variável correspondente do Todo Z no ano t-1 aos preços do ano t-1, e}$$

X no ano t, aos preços do ano t, e o valor da variável correspondente do Todo Z no ano t-1 aos preços do ano t-1, e

$$(XXV) C = \frac{\sum p_{t-1}^X q_{t-1}^X}{\sum p_t^X q_t^X + \sum p_t^Y q_t^Y} - \text{razão entre o valor da variável da Parte X no ano t, aos preços do ano t-1, e o valor da variável correspondente do Todo Z no ano t-1, aos preços do ano t.}$$

t, aos preços do ano t-1, e o valor da variável correspondente do Todo Z no ano t-1, aos preços do ano t.

Para concluir esta Seção, o Quadro 1 apresenta os valores monetários de uma certa variável para duas Partes X e Y de um Todo Z, bem como os respectivos índices de preços e de "quantum" dessa variável correspondente às Partes. Preservando uma ambigüidade que apenas será desfeita na Seção 4, nada é dito sobre se os índices aqui apresentados no Quadro 1 são estruturados com o critério de agregação de Laspeyres ou com o de Paasche.

Nesse quadro, os valores monetários das Partes e, por conseqüência, os índices de valor de base móvel (em cadeia) das Partes foram escolhidos por conveniência. O mesmo ocorreu com os índices de preços de base móvel das Partes. Por seu turno, os índices de "quantum" de base móvel das Partes foram obtidos pela razão entre os índices de valor (ausentes do Quadro 1) e os correspondentes índices de preços.<sup>6</sup>

Quadro 1

Valores monetários, índices de preços e de "quantum" das Partes X e Y constituintes do Todo Z

ANOS	PARTE X			PARTE Y		
	Valor Monetário a Preços Correntes (Rr\$ 1,00)	Índice de Preços de Base Móvel (em cadeia)	Índice de "Quantum" de Base Móvel (em cadeia)	Valor Monetário a Preços Correntes (Rr\$ 1,00)	Índice de Preços de Base Móvel (em cadeia)	Índice de "Quantum" de Base Móvel (em cadeia)
1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2	2,00	1,50	1,33	2,00	1,50	1,33
3	4,00	1,50	1,33	6,00	1,75	1,71
4	10,00	1,80	1,39	15,00	1,80	1,39
5	20,00	1,50	1,33	45,00	1,75	1,71
6	40,00	1,80	1,11	135,00	2,40	1,25

<sup>6</sup> Em todos os casos, os cálculos foram feitos com oito casas decimais, mas, por conveniência "visual", reproduzem-se apenas duas, adotando os critérios de arredondamento da ABNT.

## 2 — Como se fosse em Belíndia

A fim de mostrarmos a possível arbitrariedade implícita na agregação de variáveis econômicas, retomaremos aqui as lições dadas pelo economista visitante ao Rei de Belíndia no que diz respeito ao cálculo da renda interna daquele país<sup>7</sup>. Tal economista, em seu rigor pela objetividade, calculou três taxas de crescimento da renda de Belíndia, oferecendo-as ao suserano, a fim de que ele escolhesse a que melhor atendesse a suas próprias premissas normativas.

Naturalmente, os dados básicos de qualquer dos três cálculos eram constituídos pelas informações da renda das Partes, e o objetivo era chegar ao valor do Todo, a renda de Belíndia. O que faz as três taxas poderem diferir entre si não é, portanto, a massa de informações originais (digamos, o retrato da realidade), mas sim o critério (artificial) de agregação dessas variáveis. Assim, há três critérios para ponderar os valores das Partes, de modo a obtermos os valores do Todo. Na verdade, dependendo dos três critérios, poderemos chegar a três Todos diversos entre si. Segundo Bacha (1976, p. 58-60), chamaremos a esses critérios de “ponderação democrática”, “ponderação da pobreza” e “ponderação da riqueza”.

O primeiro critério, o da “ponderação democrática”, corresponde ao princípio da política democrática de Belíndia de que “a cada súdito, um voto”, pois cada cidadão é igualmente importante. Em termos econômicos, a ponderação democrática é uma espécie de contestação à fisiocracia e diz que todos os setores (Partes) são igualmente importantes para a obtenção da renda total (o Todo), conferindo a cada uma das Partes o mesmo peso das demais. No caso do exemplo hipotético de Belíndia reproduzido no Quadro 1 e avançado no Quadro 2, como há apenas dois setores, ou duas Partes, a ponderação de cada uma delas é de 0,5, para qualquer dos seis anos da série.

O segundo critério constitui a “ponderação da pobreza” e parte do juízo de valor de que à menor das Partes deve-se dar maior peso do que à maior, na tentativa de permitir maior igualdade na distribuição por Partes da variável correspondente ao Todo. Arbitramos aqui que, com esse critério, a ponderação de cada Parte é o complementar à unidade de sua participação no Todo aos preços correntes do ano anterior àquele em que se deseja agregar as Partes. Por exemplo, se a Parte menor participa do Todo com 40% no ano anterior, sua ponderação no ano atual passa a ser de 0,6. Politicamente, essa idéia corresponde a um obscuro princípio de “redistribution with [slow] growth”.

Finalmente, ao terceiro critério de agregação dos valores das Partes chamaremos de “ponderação da riqueza”, pois leva a um terceiro Todo, nunca menor do que o obtido com qualquer dos critérios anteriores. A analogia política deste crité-

<sup>7</sup> Consta desse longínquo país que, ao morrer seu rei, não foi permitido que o delfim o substituisse, proclamando-se no ano 7 outra nova república. Diz-se que nela o economista visitante teria sido convidado a presidir a Fundação Instituto Belindiano de Geocartas e Estatística.



rio corresponde à idéia de que a cada rúpia real, independentemente da Parte que origina ser mais ou menos rica, cabe um voto na constituição do Todo. Este critério é simétrico ao segundo, adotando como elemento de ponderação a própria participação da Parte no Todo aos preços correntes do ano anterior. Obviamente, o setor que gerar mais rúpias reais será o mais rico, importante e de maior peso nas ponderações.

Para o critério da ponderação democrática, o economista, examinando os dados do Quadro I, fez o seguinte raciocínio. No ano 1, cada setor produziu Rr\$ 1, logo o valor total foi de Rr\$ 2, o que lhe pareceu obviamente indiscutível. A esse valor de Rr\$ 2,00, ele associou o índice 1, significando a unidade que configura o início dos tempos. Para o ano 2, ambos os setores cresceram 100%, logo, em média, o Todo cresceu 100%, e o índice correspondente é 2. No ano seguinte, um setor cresceu 100%, ao passo que o outro cresceu 200%: em média, cresceram 150%. Isso leva a um índice de 2,5, o que atribui certa unidade à diversidade belindiana. E assim procedendo sucessivamente, obtive os valores da primeira coluna do Quadro 2.

## Quadro 2

Índice de valor de base móvel do Todo e seu correspondente valor monetário, com os critérios de ponderação democrática, da pobreza e da riqueza

ANOS	PONDERAÇÃO DEMOCRÁTICA		PONDERAÇÃO DA POBREZA		PONDERAÇÃO DA RIQUEZA	
	Índice de Base Móvel	Valor Monetário (Rr\$)	Índice de Base Móvel	Valor Monetário (Rr\$)	Índice de Base Móvel	Valor Monetário (Rr\$)
1	1,00	2,00	1,00	2,00	1,00	2,00
2	2,00	4,00	2,00	4,00	2,00	4,00
3	2,50	10,00	2,50	10,00	2,50	10,00
4	2,50	25,00	2,50	25,00	2,50	25,00
5	2,50	62,50	2,40	60,00	2,60	65,00
6	2,50	156,25	2,31	138,46	2,69	175,00

Usando o critério de ponderação da pobreza, novamente o economista atribuiu os valores de 1 ao índice e Rr\$ 2 à renda no ano correspondente ao início dos tempos. Para o ano 2, onde havia perfeita igualdade entre os setores, não houve maiores dificuldades, sendo que cada um manteve sua participação de 50% no valor do Todo. No ano 3, os setores cresceram 100% e 200%, mas como a ponderação usada era a do ano anterior, encontrou o mesmo índice de crescimento de 2,5 já obtido com o critério democrático. Não obstante, a participação das Partes no Todo

mudou para 40% e 60%. Ocorre que, no ano 4, ambos os setores cresceram 150%, o que perfaz uma média aritmética ponderada por 0,6 e 0,4 de 150%, correspondendo-lhe um índice de 2,5 novamente igual ao democrático. Vale salientar que ambas as Partes mantiveram sua participação de 0,4 e 0,6 no Todo. No quinto ano, os setores voltaram a crescer a taxas diferenciadas: 100% e 200%. Atribuindo o peso de 0,6 ao setor já visivelmente mais pobre (ou, se quiséssemos, menor) e 0,4 ao outro, o índice resultante é 2,4, diferentemente do critério democrático. De modo análogo, encontrou o índice de 2,31 para a média do crescimento no último ano do reino. Encadeando esses índices e os aplicando ao valor monetário do Todo correspondente ao início dos tempos, obteve os valores monetários da quarta coluna do Quadro 2.

Os valores correspondentes ao critério da riqueza foram obtidos de modo análogo ao anterior (“mutatis mutandis”, teria dito o economista, que sabia latim e odiava a cláusula “caeteris paribus”), chegando às duas últimas colunas do Quadro 2.

Observamos no Quadro 2 que, para cada um dos quatro primeiros anos da série, o índice de valor de base móvel do Todo é o mesmo para qualquer dos três critérios utilizados para obtê-lo. Essa igualdade no ano 1 é óbvia; nos anos 2 e 3 deve-se a que as ponderações são as mesmas. No ano 4, deve-se ao fato de que os índices de valor das Partes é que são iguais, o que faz suas médias aritméticas simples ou ponderadas serem iguais.

Nos anos 5 e 6, tanto os índices de valor das Partes como suas respectivas ponderações diferem. Isso leva a obtermos índices de valor do Todo diversos, conforme o critério de ponderação utilizado. Podemos observar que a ponderação democrática gera o índice de valor médio entre os três, a ponderação da pobreza leva a um índice inferior à média, ao passo que a ponderação da riqueza conduz a um índice superior à média.

Recebendo o Quadro 2 das mãos do economista, o rei da Belíndia percebeu que havia três Todos. Consta, até, que teve uma crise de identidade, pois ficou confuso em identificar qual dos três correspondia à sua Belíndia. Isso porque ele constatou que o critério de ponderação da riqueza correspondia ao índice de valor do Todo obtido pela simples soma dos valores correntes. Sucede que seus conselheiros costumavam apresentar-lhe essas cifras, como sendo “uma medida exclusivamente técnica” (Bacha, 1976, p. 61). O soberano, porém, não hesitou em tachá-la de “felicômetro dos ricos”.

Desse modo, vemos que adotar a ponderação da riqueza para obter a taxa de crescimento de Belíndia como se fosse a única taxa possível tem importantes implicações para a análise econômica, para não falarmos nas implicações psicológicas ou nas éticas. . . Adotar tal ponderação implica que, à medida que os setores modernos crescem mais que a média dos demais setores, eles estão aumentando sua participação no Todo, dando a impressão falaciosa de que é toda a economia que se está modernizando. Isso ocorre na razão direta do ritmo de crescimento do setor moderno: quanto mais ele cresce, mais rapidamente aumenta sua participação no Todo, logo maior é sua contribuição para a formação da taxa de crescimento do Todo.

### 3 — Como se fosse o caso comum

Vimos na seção anterior que a simples agregação de valores monetários correntes é problemática, pois depende do critério de ponderação escolhido para a composição das Partes. Mas, mesmo admitindo que o critério de ponderação da riqueza é o mais razoável para a agregação dos valores correntes, vamos mostrar nesta seção, com o uso de um exemplo imaginário<sup>8</sup>, que o critério usual de se agregarem valores monetários reais (a preços constantes) leva a outros problemas ainda mais sérios.

Com efeito, é bastante comum a prática de, ao se necessitar obter o valor do Todo aos preços constantes de um certo ano, tomar os valores correntes de suas Partes e deflacioná-los com um índice de preços para cada Parte, índices estes correspondentes a esse ano. Nosso exemplo adiante apresentado salienta o fato de que, quando se modifica a escala dos deflatores utilizados para a conversão dos valores monetários a preços correntes de cada uma das Partes em constantes, os valores monetários a preços constantes do Todo assim constituído diferem. Até aí, não há maiores problemas, a não ser o de que o Todo é uma entidade múltipla, refletindo o fato de que, quando se muda a escala do deflator, está se substituindo o conjunto dos preços do ano-referência por outro. O problema existente, porém, diz respeito a outro tipo de observação.

Ocorre que, com diferentes centros da escala dos deflatores, se chega a diferentes Todos, tão diferentes, na verdade, que suas taxas de crescimento podem variar significativamente.

Assim, tomando os valores monetários a preços correntes das Partes e os deflacionando com os deflatores do Quadro 1, obtemos os valores monetários do Quadro 3 para o Todo. Para tanto, transformamos esses índices de base móvel em índices de escala fixa em diferentes anos. Escolhemos por conveniência, os anos 1, 3 e 5 para centrarem as escalas dos deflatores que originarão três séries de valores reais do Todo. Convém ressaltarmos que as alterações na taxa de crescimento do Todo ficariam ainda mais visíveis, caso repetíssemos o exercício para os demais anos como centro da escala. O índice de “quantum” de escala móvel do Quadro 3 é obtido pela razão entre os valores reais de cada dois anos consecutivos.

O Quadro 3 mostra mais três Belíndias que, combinadas com as três concernentes aos critérios de ponderação democrática, da pobreza e da riqueza para os valores das Partes, nos confere um total de nove Belíndias. No entanto essa miríade de países tem alguns pontos em comum. O primeiro é que os valores monetários reais reproduzem os valores monetários nominais para os anos em que estava centrada a escala do deflator, ou seja, os valores monetários dos anos 1, 3 e 5, são os mesmos quer se os calcule a preços correntes, quer se o faça a preços constantes.

<sup>8</sup> O exemplo abaixo utiliza implicitamente o critério de ponderação da riqueza. Aceito-o pois ele vem ao entontro da postura ética de que o aumento da riqueza é o ideal econômico das sociedades humanas. Todavia, creio, na sociedade ideal, a riqueza deve ser equânimemente distribuída, o que fará convergirem os três critérios de ponderação.

Quadro 3

Valor monetário real do Todo, aos preços dos anos 1, 3 e 5, e seus correspondentes índices de "quantum" de escala móvel

ANOS	CENTRO DA ESCALA NO ANO 1		CENTRO DA ESCALA NO ANO 3		CENTRO DA ESCALA NO ANO 5	
	Valor Monetário (Rr\$)	Índice de "Quantum" de Escala Móvel	Valor Monetário (Rr\$)	Índice de "Quantum" de Escala Móvel	Valor Monetário (Rr\$)	Índice de "Quantum" de Escala Móvel
1	2,00	1,00	4,88	1,00	14,34	1,00
2	2,67	1,33	6,50	1,33	19,13	1,33
3	4,06	1,52	10,00	1,54	29,70	1,55
4	5,64	1,39	13,89	1,39	41,25	1,39
5	8,73	1,55	21,69	1,56	65,00	1,58
6	10,46	1,20	26,09	1,20	78,47	1,21

O segundo ponto de contato entre as três últimas Belíndias recém-descobertas preocupa mais do que acalma. As taxas de crescimento do produto real desse país são iguais para os anos 2 e 4, qualquer que seja o ano escolhido para centrar a escala do deflator. Demarcada essa identidade, o que passa a preocupar é a incapacidade que o método usado apresenta em permitir sua generalização para os demais anos da série. Observamos que os anos 3, 5 e 6 apresentam taxas de crescimento diversas, flanando à deriva dos ventos soprados pelo centro da escala do deflator. Isso leva à convivência temporal de três Belíndias no ano 5 e outras duas no ano 6.

Dito em outras palavras, a taxa de crescimento do Todo assume valores diversos conforme se centre a escala do deflator em diferentes anos. Nosso exemplo mostra que ela chega a divergir em três pontos percentuais. Se o mago do reino pudessem converter "ex post" esses 3% em efetivo aumento da disponibilidade de bens e serviços, teríamos a cabal confirmação de que os valores reais são imaginários, o que abriria caminho para estudos sobre a função de produção de maná. . .

Deve ficar claro que os índices de preços de base móvel do Todo serão obtidos pela divisão de seus valores monetários correntes pelos valores monetários constantes correspondentes aos três anos tomados para centrar a escala dos índices de preços de base móvel originais. Evidentemente, os índices de preços resultantes também diferirão nos anos 1, 3 e 5.

Esse pipocar de taxas de crescimento de "quantum" e preços seria eliminado, caso se abandonasse a etapa de construção de séries de valor real das Partes aos preços de um dado ano, construindo-se apenas o valor real para cada dois anos consecutivos. Isso levaria a um único índice de "quantum" de base móvel, o qual poderia ter sua escala centrada em qualquer ano, sem alterar sua taxa de crescimento. Mes-

mo assim, estaríamos trabalhando apenas com índices de “quantum” de Laspeyres e índices de preços de Paasche, conforme é mostrado na seção seguinte. Mas antes de fazê-lo, parece oportuno mostrarmos analiticamente<sup>9</sup> o ocorrido. Investigaremos apenas os numeradores dessas taxas, já que os denominadores são constituídos pelo termo comum  $\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X + \Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y$ . Quer dizer, as taxas de crescimento são diferentes, porque os numeradores o são.

Vejamos primeiramente o que ocorre ao numerador da taxa de crescimento de  $V^Z$  quando  $V_t^X$  e  $V_t^Y$  são deflacionados com índices de preços de Laspeyres.

$$(XXVI) V_{t-1,t}^{Z,L} = \frac{\Sigma p_t^X q_t^X}{IPL_t^X} + \frac{\Sigma p_t^Y q_t^Y}{IPL_t^Y} =$$

$$= \frac{\Sigma p_t^X q_t^X}{\Sigma p_t^X q_{t-1}^X / \Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X} + \frac{\Sigma p_t^Y q_t^Y}{\Sigma p_t^Y q_{t-1}^Y / \Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y}$$

$$(XXVII) V_{t-1,t}^{Z,L} = \Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X \cdot IQP_t^X + \Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y \cdot IQP_t^Y.$$

Mudar o centro da escala desse índice de preços de Laspeyres de  $t-1$  para  $j$  implica

$$(XXVIII) V_{j,t-1,t}^{Z,L} = \frac{\Sigma p_t^X q_t^X}{IPL_{t-1,t}^X / IPL_{t-1,j}^X} + \frac{\Sigma p_t^Y q_t^Y}{IPL_{t-1,t}^Y / IPL_{t-1,j}^Y},$$

onde os subíndices dos índices de preços indicam o ano-base e o ano que centra a escala.

$$V_{j,t-1,t}^{Z,L} = \frac{\Sigma p_t^X q_t^X}{\frac{\Sigma p_t^X q_{t-1}^X / \Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X}{\Sigma p_j^X q_{t-1}^X / \Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X}} + \frac{\Sigma p_t^Y q_t^Y}{\frac{\Sigma p_t^Y q_{t-1}^Y / \Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y}{\Sigma p_j^Y q_{t-1}^Y / \Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y}}$$

<sup>9</sup> As demonstrações adiante estabelecidas têm uma notação e desenvolvimento nada abreviados. Tenho presente o “dictum” de Mishan, repassado pelo Economista Eugênio Cânepa, no sentido de que consideramos o “papel como um bem menos escasso do que o tempo do leitor”. Tenho a certeza de que as partes que um certo leitor considerar redundantes podem ser saltadas com mais facilidade do que o procedimento inverso.

$$(XXIX) V_{j,t-1,t}^{Z,L} = \Sigma p_j^X q_{t-1}^X \cdot IQP_{t-1,t}^X + \Sigma p_j^Y q_{t-1}^Y \cdot IQP_{t-1,t}^Y.$$

Comparando  $V_{t-1,t}^{Z,L}$  com  $V_{j,t-1,t}^{Z,L}$ , podemos concluir que só em casos extremamente particulares haverá identidade entre essas expressões, o que permite pensarmos que, em geral, as taxas de crescimento de  $V^Z$  serão diferentes, conforme a escala dos deflatores de  $V^X$  e  $V^Y$  seja centrada em um ou outro ano.

Em segundo lugar, passemos ao exame do numerador da taxa de crescimento de  $V^Z$  quando  $V^X$  e  $V^Y$  são deflacionados com índices de preços de Paasche.

$$(XXX) V_{t-1,t}^{Z,P} = \frac{\Sigma p_t^X q_t^X}{IPP_{t-1,t}^X} + \frac{\Sigma p_t^Y q_t^Y}{IPP_{t-1,t}^Y} = \frac{\Sigma p_t^X q_t^X}{\Sigma p_t^X q_t^X / \Sigma p_{t-1}^X q_t^X} + \frac{\Sigma p_t^Y q_t^Y}{\Sigma p_t^Y q_t^Y / \Sigma p_{t-1}^Y q_t^Y}$$

$$(XXXI) V_{t-1,t}^{Z,P} = \Sigma p_{t-1}^X q_t^X + \Sigma p_{t-1}^Y q_t^Y.$$

Mudar a escala desse índice de preços de Paasche de  $t-1$  para  $j$  leva a

$$(XXXII) V_{j,t-1,t}^{Z,P} = \frac{\Sigma p_t^X q_t^X}{IPP_{t-1,t}^X / IPP_{t-1,j}^X} + \frac{\Sigma p_t^Y q_t^Y}{IPP_{t-1,t}^Y / IPP_{t-1,j}^Y} =$$

$$= \frac{\Sigma p_t^X q_t^X}{\frac{\Sigma p_t^X q_t^X / \Sigma p_{t-1}^X q_t^X}{\Sigma p_j^X q_t^X / \Sigma p_{t-1}^X q_t^X}} + \frac{\Sigma p_t^Y q_t^Y}{\frac{\Sigma p_t^Y q_t^Y / \Sigma p_{t-1}^Y q_t^Y}{\Sigma p_j^Y q_t^Y + \Sigma p_{t-1}^Y q_t^Y}}, e$$

$$(XXXIII) V_{j,t-1,t}^{Z,P} = \Sigma p_j^X q_t^X + \Sigma p_j^Y q_t^Y.$$

Também nesse segundo caso, podemos pensar que, geralmente, as taxas de crescimento de  $V^Z$  serão diferentes, conforme o centro da escala dos deflatores de  $V^X$  e  $V^Y$  se localize em um ou outro ano.

Resumindo, a única forma de obtermos taxas únicas de crescimento para o fodo ao deflacionarmos os valores das Partes e agregarmos os resultados consiste em fazermos as agregações ano a ano, isto é, com índices de base móvel.

## 4 — Como convém ao caso comum

### 4.1 — Considerações iniciais

Na Seção 3, mostramos que mudar a escala de índices de preços de Partes de um Todo e em seguida somar os valores deflacionados resultantes implica, possivelmente, alterar a taxa de crescimento da variável correspondente ao Todo. Em outras palavras, vimos que o procedimento de agregar valores a preços constantes confere resultados que variam dependendo da simples escala dos deflatores das Partes: as taxas de crescimento de Todos assim obtidos ficam comprometidas. Desse modo, a solução é trabalhar-se sempre com índices de base móvel ou em cadeia. Quando tal não for possível, como é o caso, por exemplo, da construção de índices de preços ao consumidor, é fundamental, para que o reino viva dias mais felizes, que isso fique bem claro para aqueles que irão analisar os índices.

Nesta seção, pretendemos mostrar que a forma adequada de se obterem taxas de crescimento de Todos consiste em agregar os índices de valor, preços e “quantum” de suas Partes.

### 4.2 — Índices de valor

Neste item, desejamos mostrar que o índice de valor do Todo Z pode ser obtido por uma média aritmética ponderada dos índices de valor de suas Partes X e Y. Dividindo a expressão (I) pela (II), obtivemos (VII), que pode ser reescrita como:

$$(XXXIV) IV_t^Z = \frac{\Sigma p_t^X q_t^X}{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X + \Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y} + \frac{\Sigma p_t^Y q_t^Y}{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X + \Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y}$$

Multiplicando ambos os termos do membro direito de  $IV_t^Z$  acima por um fator unitário conveniente, temos

$$IV_t^Z = \frac{\Sigma p_t^X q_t^X}{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X + \Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y} \cdot \frac{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X}{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X} + \frac{\Sigma p_t^Y q_t^Y}{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X + \Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y} \cdot \frac{\Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y}{\Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y}$$

Reordenando

$$IV_t^Z = \frac{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X}{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X + \Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y} \cdot \frac{\Sigma p_t^X q_t^X}{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X} + \frac{\Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y}{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X + \Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y} \cdot \frac{\Sigma p_t^Y q_t^Y}{\Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y}$$

e adotando as definições da Seção 1,

$$(XXXV) IV_t^Z = A_{t-1} \cdot IV_t^X + (1-A_{t-1})IV_t^Y,$$

isto é, o índice de valor do Todo é a média aritmética ponderada dos índices de valor das Partes. A ponderação de cada índice de valor das Partes é dada pela participação de cada Parte no Todo aos preços do ano anterior.

### 4.3 – Índices de “quantum”

#### 4.3.1 – O índice de “quantum” de Laspeyres

Conhecendo os índices de “quantum” de Laspeyres das Partes X e Y, podemos obter o índice de “quantum” de Laspeyres do Todo com o uso de uma combinação linear dos índices das Partes. Dividindo a expressão (III) pela expressão (II), encontramos (XII), que pode ser reescrita como:

$$(XXXVI) IQL_t^Z = \frac{\Sigma p_{t-1}^X q_t^X}{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X + \Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y} + \frac{\Sigma p_{t-1}^Y q_t^Y}{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X + \Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y}$$

Multiplicando ambos os termos do membro direito de  $IQL_t^Z$  por um fator unitário conveniente



$$IQL_t^Z = \frac{\Sigma p_{t-1}^X X}{\Sigma p_{t-1}^X X + \Sigma p_{t-1}^Y Y} \cdot \frac{\Sigma p_{t-1}^X X}{\Sigma p_{t-1}^X X} + \frac{\Sigma p_{t-1}^Y Y}{\Sigma p_{t-1}^X X + \Sigma p_{t-1}^Y Y} \cdot \frac{\Sigma p_{t-1}^Y Y}{\Sigma p_{t-1}^Y Y}.$$

Reordenando, temos

$$IQL_t^Z = \frac{\Sigma p_{t-1}^X X}{\Sigma p_{t-1}^X X + \Sigma p_{t-1}^Y Y} \cdot \frac{\Sigma p_{t-1}^X X}{\Sigma p_{t-1}^X X} + \frac{\Sigma p_{t-1}^Y Y}{\Sigma p_{t-1}^X X + \Sigma p_{t-1}^Y Y} \cdot \frac{\Sigma p_{t-1}^Y Y}{\Sigma p_{t-1}^Y Y}.$$

e adotando as definições da Seção 2:

$$(XXXVII) IQL_t^Z = A_{t-1} IQL_t^X + (1-A_{t-1}) IQL_t^Y,$$

isto é, o índice de “quantum” de Laspeyres do Todo é obtido pela média aritmética ponderada dos índices de “quantum” de suas Partes. O fator de ponderação do índice de cada Parte é a sua respectiva participação no Todo aos preços correntes do ano-base.

#### 4.3.2 – O índice de “quantum” de Paasche

O índice de “quantum” de Paasche de um Todo também pode ser obtido a partir dos índices de “quantum” de Paasche de suas Partes.

Definimos a expressão (XV) como sendo o índice de “quantum” de Paasche de Z. Portanto,

$$\frac{1}{IQP_t^Z} = \frac{\Sigma p_t^X X + \Sigma p_t^Y Y}{\Sigma p_t^X X + \Sigma p_t^Y Y}.$$

Desmembrando-a e multiplicando ambos os termos resultantes por um fator unitário conveniente, temos

$$\frac{1}{IQP_t^Z} = \frac{\Sigma p_t^X X}{\Sigma p_t^X X + \Sigma p_t^Y Y} \cdot \frac{\Sigma p_t^X X}{\Sigma p_t^X X} + \frac{\Sigma p_t^Y Y}{\Sigma p_t^X X + \Sigma p_t^Y Y} \cdot \frac{\Sigma p_t^Y Y}{\Sigma p_t^Y Y}.$$

Reordenando a expressão acima,

$$\frac{1}{IQP_t^Z} = \frac{\Sigma p_t^X X}{\Sigma p_t^X X + \Sigma p_t^Y Y} \cdot \frac{\Sigma p_t^X X}{\Sigma p_t^X X} + \frac{\Sigma p_t^Y Y}{\Sigma p_t^X X + \Sigma p_t^Y Y} \cdot \frac{\Sigma p_t^Y Y}{\Sigma p_t^Y Y}.$$

Então, por definição

$$\frac{1}{IQP_t^Z} = \frac{A_t}{IQP_t^X} + \frac{1-A_t}{IQP_t^Y}.$$

Finalmente,

$$(XXXVIII) \quad IQP_t^Z = \frac{1}{\frac{A_t}{IQP_t^X} + \frac{1-A_t}{IQP_t^Y}}.$$

Vemos, assim, que o índice de “quantum” de Paasche do Todo é obtido pela média harmônica ponderada dos índices de “quantum” de suas Partes. O fator de ponderação do índice de cada Parte é sua respectiva participação no Todo aos preços correntes do ano em foco. É interessante destacarmos, a esta altura, que não é muito usual o entendimento dos índices de Paasche como médias harmônicas. Naturalmente, Fisher (1927, p. 60 e passim) o faz, no que é acompanhado na versão em português do livro de Karmel & Polasek (1972, p. 397-8).

## 4.4 – Índices de preços

### 4.4.1 – Índice de preços de Laspeyres

Conhecendo os índices de preços de Laspeyres das Partes X e Y constitutivas de um Todo Z, podemos obter o índice de preços de Laspeyres do Todo a partir desses índices das Partes. Reescrevendo a expressão (XVIII) de modo conveniente temos:

$$(XXXIX) \text{IPL}_t^Z = \frac{\Sigma p_t^X X}{\Sigma p_{t-1}^X X + \Sigma p_{t-1}^Y Y} + \frac{\Sigma p_t^Y Y}{\Sigma p_{t-1}^X X + \Sigma p_{t-1}^Y Y}.$$

Corrigindo os dois termos do lado direito com um fator conveniente, vem:

$$\text{IPL}_t^Z = \frac{\Sigma p_t^X X}{\Sigma p_{t-1}^X X + \Sigma p_{t-1}^Y Y} \cdot \frac{\Sigma p_{t-1}^X X}{\Sigma p_{t-1}^X X} + \frac{\Sigma p_t^Y Y}{\Sigma p_{t-1}^X X + \Sigma p_{t-1}^Y Y} \cdot \frac{\Sigma p_{t-1}^Y Y}{\Sigma p_{t-1}^Y Y}.$$

ou

$$\text{IPL}_t^Z = \frac{\Sigma p_{t-1}^X X}{\Sigma p_{t-1}^X X + \Sigma p_{t-1}^Y Y} \cdot \frac{\Sigma p_t^X X}{\Sigma p_{t-1}^X X} + \frac{\Sigma p_{t-1}^Y Y}{\Sigma p_{t-1}^X X + \Sigma p_{t-1}^Y Y} \cdot \frac{\Sigma p_t^Y Y}{\Sigma p_{t-1}^Y Y}.$$

Temos, por definição:

$$(XL) \text{IPL}_t^Z = A_{t-1} \text{IPL}_t^X + (1-A_{t-1}) \text{IPL}_t^Y,$$

a qual informa que o índice de preços de Laspeyres do Todo é a média aritmética ponderada dos índices de suas Partes. O fator de ponderação do índice de cada Par-

te, tal como no caso de índices de “quantum”, é sua respectiva participação no Todo aos preços correntes do ano anterior.

#### 4.4.2 – Índice de preços de Paasche

Conhecendo os índices de preços de Paasche das Partes X e Y constitutivas de um Todo Z, podemos obter o índice de preços de Paasche do Todo a partir desses índices das Partes. Tomando o inverso da expressão (XXI), temos:

$$\frac{1}{\text{IPP}_t^Z} = \frac{\sum p_{t-1}^X q_t^X + \sum p_{t-1}^Y q_t^Y}{\sum p_t^X q_t^X + \sum p_t^Y q_t^Y}.$$

Decompondo o membro do lado direito e corrigindo os dois termos resultantes com um fator unitário conveniente, temos:

$$\frac{1}{\text{IPP}_t^Z} = \frac{\sum p_{t-1}^X q_t^X}{\sum p_t^X q_t^X + \sum p_t^Y q_t^Y} \cdot \frac{\sum p_t^X q_t^X}{\sum p_t^X q_t^X} + \frac{\sum p_{t-1}^Y q_t^Y}{\sum p_t^X q_t^X + \sum p_t^Y q_t^Y} \cdot \frac{\sum p_t^Y q_t^Y}{\sum p_t^Y q_t^Y}.$$

Reordenando, segue:

$$\frac{1}{\text{IPP}_t^Z} = \frac{\sum p_t^X q_t^X}{\sum p_t^X q_t^X + \sum p_t^Y q_t^Y} \cdot \frac{\sum p_{t-1}^X q_t^X}{\sum p_t^X q_t^X} + \frac{\sum p_t^Y q_t^Y}{\sum p_t^X q_t^X + \sum p_t^Y q_t^Y} \cdot \frac{\sum p_{t-1}^Y q_t^Y}{\sum p_{t-1}^Y q_t^Y}$$

e substituindo as expressões já definidas, temos

$$\frac{1}{\text{IPP}_t^Z} = \frac{A_t}{\text{IPP}_t^X} + \frac{1-A_t}{\text{IPP}_t^Y}$$

$$(XLI) \text{IPP}_t^Z = \frac{1}{\frac{A_t}{\text{IPP}_t^X} + \frac{1-A_t}{\text{IPP}_t^Y}}.$$

De modo análogo ao índice de “quantum”, vemos que o índice de preços de Paasche do Todo é obtido pela média harmônica ponderada dos índices de suas Partes. O fator de ponderação é o mesmo do índice de “quantum”.

## 4.5 — Índice de preços do Todo em função de índices de “quantum” das Partes

Como sabemos,

$$IV = IPL_t \cdot IQP_t = IPP_t \cdot IQL_t$$

Com base nessas identidades, podemos construir os índices de preços e de “quantum” do Todo a partir de uma combinação linear dos índices de valor e, respectivamente, “quantum” e preços das Partes. Ilustrativamente, consideremos a fórmula do índice de “quantum” de Laspeyres do Todo (expressão XXXVIII).

$$IQL_t^Z = A_{t-1} \cdot IQL_t^X + (1-A_{t-1})IQL_t^Y,$$

a qual pode ser transformada em

$$(XLII) \quad IQL_t^Z = A_{t-1} \cdot \frac{IV_t^X}{IPP_t^X} + (1-A_{t-1}) \cdot \frac{IV_t^Y}{IPP_t^Y}.$$

Dependendo da informação empírica disponível concernente a setores concretos, esta e as demais fórmulas transformadas podem apresentar razoável grau de interesse. Também podem apresentar interesse outras equações que relacionam imediatamente os índices de preços do Todo com índices de “quantum” das Partes. Nesse caso, os fatores de ponderação  $A_{t-1}$  e  $A_t$  são substituídos por outras expressões, cujo significado, por contraste, não é tão discernível.

Iniciemos com o índice de preços de Laspeyres do Todo. Tomando a expressão (XVIII), desmembrando-a e corrigindo os dois termos resultantes com os fatores unitários respectivos

$$\frac{\sum p_t^X q_t^X}{\sum p_t^X q_t^X} \text{ e } \frac{\sum p_t^Y q_t^Y}{\sum p_t^Y q_t^Y},$$

temos:

$$IPL_t^Z = \frac{\sum p_t^X q_t^X}{\sum p_{t-1}^X q_{t-1}^X + \sum p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y} \cdot \frac{\sum p_t^X q_{t-1}^X}{\sum p_t^X q_t^X} + \frac{\sum p_t^Y q_t^Y}{\sum p_{t-1}^X q_{t-1}^X + \sum p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y} \cdot \frac{\sum p_t^Y q_{t-1}^Y}{\sum p_t^Y q_t^Y},$$

o que, por definição, confere

$$(XLIII) \text{ IPL}_t^Z = \frac{B}{\text{IQP}_t^X} + \frac{\text{IV}_t^{Z-B}}{\text{IQP}_t^Y}.$$

Em seguida, retomando a expressão (XXI), desmembrando-a e corrigindo os dois termos resultantes, com os fatores unitários respectivos

$$\frac{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X}{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X} \text{ e } \frac{\Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y}{\Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y},$$

temos:

$$\frac{1}{\text{IPP}_t^Z} = \frac{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X}{\Sigma p_t^X q_t^X + \Sigma p_t^Y q_t^Y} \cdot \frac{\Sigma p_{t-1}^X q_t^X}{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X} + \frac{\Sigma p_{t-1}^Y q_t^Y}{\Sigma p_t^X q_t^X + \Sigma p_t^Y q_t^Y} \cdot \frac{\Sigma p_{t-1}^Y q_t^Y}{\Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y},$$

chegando, por definição, a:

$$\frac{1}{\text{IPP}_t^Z} = C \cdot \text{IQL}_t^X + \left( \frac{1}{\text{IV}_t^Z} - C \right) \text{IQL}_t^Y, \text{ e}$$

$$(XLIV) \text{ IPP}_t^Z = \frac{1}{C \cdot \text{IQL}_t^X + \left( \frac{1}{\text{IV}_t^Z} - C \right) \text{IQL}_t^Y}.$$

Passando aos índices de "quantum" do Todo, a primeira etapa consiste em determinar o de Laspeyres concernente ao Todo, a partir dos índices de preços de Paasche das Partes. Retomando a expressão (XII) e fazendo as manipulações já familiares, temos

$$\text{IQL}_t^Z = \frac{\Sigma p_t^X q_t^X}{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X + \Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y} \cdot \frac{\Sigma p_{t-1}^X q_t^X}{\Sigma p_t^X q_t^X} + \frac{\Sigma p_t^Y q_t^Y}{\Sigma p_{t-1}^X q_{t-1}^X + \Sigma p_{t-1}^Y q_{t-1}^Y} \cdot \frac{\Sigma p_{t-1}^Y q_t^Y}{\Sigma p_t^Y q_t^Y},$$

ou seja,

$$(XLV) \text{ IQL}_t^Z = \frac{B}{\text{IPP}_t^X} + \frac{\text{IV}_t^Z - B}{\text{IPP}_t^Y}.$$

Finalmente, a manipulação da expressão (XV) confere

$$(XLVI) \text{ IQP}_t^Z = \frac{1}{C \cdot \text{IPL}_t^X + (1/\text{IV}_t^Z - C)\text{IPL}_t^Y}.$$

## 5 – Como se voltássemos a Belíndia

Utilizando as expressões (XXXV), (XXXVII), (XXXVIII), (XL) e (XLI), podemos construir o Quadro 4, a partir das informações contidas no Quadro 1. No Quadro 1, nada foi dito sobre se o critério de agregação dos índices de preços das Partes é o de Laspeyres ou o de Paasche. Nesse caso, supusemos que eles eram agregados ora por um, ora por outro critério. Caso venhamos a descobrir, por exemplo, que os índices de preços das Partes sejam estruturados pelo critério de Laspeyres, devemos adotar a expressão (XL) para obter o índice de preços de Laspeyres correspondente ao Todo Z; então, a obtenção do índice de “quantum” do Todo deve ocorrer com o uso da expressão (XXXVIII), o que confere um índice de Paasche.

No caso de identificarmos os índices de preços das Partes do Quadro 1 como sendo estruturados pelo critério de Paasche, então o uso das expressões (XLI) e (XXXVII) nos confere, respectivamente, um índice de preços de Paasche e um índice de “quantum” de Laspeyres para o Todo.

Quadro 4

Índice de valor, índices de preços de Laspeyres e Paasche e índices de “quantum” de Laspeyres e Paasche do Todo Z construídos a partir dos índices de suas Partes

base móvel (índice em cadeia)

ANOS	$\text{IV}_t^Z$	$\text{IPL}_t^Z$	$\text{IPP}_t^Z$	$\text{IQL}_t^Z$	$\text{IQP}_t^Z$
1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2	2,00	1,50	1,50	1,33	1,33
3	2,50	1,63	1,64	1,52	1,54
4	2,50	1,80	1,80	1,39	1,39
5	2,60	1,65	1,66	1,56	1,58
6	2,69	2,22	2,23	1,21	1,22

Há dois comentários a fazer sobre os números recém-obtidos. O primeiro diz respeito à comparação entre o índice de “quantum” do Quadro 4 e os três índices de “quantum” do Quadro 3. Os do Quadro 3 são “aproximações imperfeitas” do “verdadeiro” índice de Laspeyres obtido no Quadro 4. Dependendo do centro da escala adotada no Quadro 3, há identidade entre seus valores e os do Quadro 4, o que é uma evidência suficiente para adotar-se o formulário da Seção 4, pelo menos com o objetivo de se poder contar com taxas de crescimento unívocas<sup>10</sup>.

O segundo comentário a ser feito sobre os números do Quadro 4 diz respeito ao fato de que os índices de Laspeyres, tanto os de preços como os de “quantum”, são menores ou iguais aos correspondentes índices de Paasche. Isso ocorre em virtude de os valores das quantidades e preços originais, presumivelmente, correlacionarem-se positivamente<sup>11</sup>. Essa hipótese é fortalecida pela (e mesmo redundante com) magnitude dos índices de preços setoriais. Ou seja, onde há fortes processos inflacionários, preços e quantidades devem-se relacionar positivamente e, por consequência, os índices de Laspeyres devem subestimar e os de Paasche deve superestimar a “verdadeira” inflação e o “verdadeiro” crescimento.

## Conclusão

Depois de toda essa longa marcha, às vezes fastidiosa e às vezes batida, podemos resumir algumas idéias, extrair implicações de outras e prometer outras utilizações para os presentes resultados.

<sup>10</sup> É curioso destacarmos que, porexemplo, Karmel & Polasek (1972, p. 400-2) falam na “combinação” de índices agregativos e não destacam o fato de que a forma de se “combinarem” índices de Laspeyres é diferente da forma de fazê-lo para índices de Paasche. Sua Tabela 13.5 ilustra a agregação de um índice de preços ao consumidor (que suponho seja um índice de Laspeyres), de modo conceitualmente correto no sentido de obter o índice do Todo como média aritmética ponderada dos índices das Partes. O segundo pecadilho desses autores consiste em não esclarecer o fato de que se se mudasse a escala do índice de dezembro de 1963 para junho de 1967, os preços deixariam de crescer 12,5% e teriam crescido a 12,3%. A propósito, desejo acrescentar que meu trabalho de 1984 discute uma temática um tanto paralela à do presente artigo. Naquele, contesto uma prática usual de se deflacionarem valores de Partes e Todo para calcular a participação de uma em outro. Ocorre que, em 1974, escrevi um trabalho em co-autoria com Ruben Soares de Lima (FEE, 1974, p. 115 e 117), no qual utilizamos a prática que tentei exorcizar no trabalho de 1984. Digo isso, pois os autores desse trabalho de 1974 valorizamos suas virtudes e aceitamos estoicamente este pecadilho. Mas de pecadilhos e estoicismos eu vivo: em 1981, escrevi um artigo no qual tentava criar índices de preços de Paasche para o Rio Grande do Sul; na hora de agregá-los, ao invés de utilizar médias harmônicas, lancei mão de médias aritméticas. Como saldo, alenta-me constatar que o erro de 1974 tomou-me 10 anos para ser consertado, ao passo que o de 1981 foi corrigido em apenas quatro. . .

<sup>11</sup> Ver a este respeito, por exemplo, Karmel & Polasek (1972, p. 388-91).



Em primeiro lugar, deve ser proscria a prática de se somarem valores reais das Partes de uma variável com o uso de dois deflatores diversos<sup>1 2</sup>, obtendo os Todos correspondentes a dois anos e ao dividir um pelo outro obter a taxa de crescimento do Todo. Tal procedimento implica a obtenção de taxas de crescimento diferentes caso se centre a escala dos índices de preços usados para deflacionar o valor das Partes em um ou outro ano. Isso porque os dois conjuntos de valores reais assim obtidos não são homogêneos no que tange aos preços usados para ponderar as quantidades e, ademais, sua aparência com um índice de “quantum” de Paasche é limitada. Em outras palavras, não tem maior significado econômico a combinação linear de valores reais. Nesse sentido é que sustentei que os valores reais são “imaginários”.

Em segundo lugar, ao proscrevermos a prática relatada no parágrafo anterior, devemos substituí-la pela agregação direta de índices de “quantum” (e de preços, é claro) com o uso das expressões desenvolvidas na Seção 4 acima. Para tanto, é absolutamente fundamental sabermos que os índices que estamos agregando foram estruturados pelo critério de Laspeyres ou pelo de Paasche. No primeiro caso, eles devem ser agregados com médias aritméticas ponderadas e, no segundo, com médias harmônicas ponderadas.

Em terceiro lugar, combinando as idéias expostas nas Seções 3 e 4, podemos concluir que deve-se procurar construir índices de base móvel (em cadeia), uma vez que só assim eles podem ser agregados de modo a não perderem suas qualidades e não magnificarem seus defeitos. Somente com a agregação de índices em cadeia é que chegaremos a taxas de crescimento determinadas e independentes do centro da escala. Caso tal procedimento seja impossível na prática, como é o caso dos índices mensais de preços ao consumidor e de tantos outros, devemos ter presente que no índice resultante foi introduzido um erro de medida adicional. Nessa linha, deve ficar claro que, após contarmos com os índices de base móvel do Todo, poderemos centrar sua escala em qualquer ano da série, sem comprometer a magnitude das taxas de crescimento.

Essas considerações trazem à baila um quarto ponto. Se só faz sentido se calcular a taxa de crescimento de uma variável para dois períodos consecutivos, reforça-se a proposição de que a tradicional forma de se calcular a taxa média de uma série mais longa como uma média geométrica dos extremos deve ser substituída pela média geométrica das taxas de todos os períodos.

Em quinto lugar, cabe fazermos o registro das mudanças de procedimento metodológico da FGV no caso da agregação de valores reais do produto interno bruto no Brasil. Independentemente deste trabalho, ela já substituiu os procedimentos mencionados no primeiro ponto acima pelos recomendados no segundo.<sup>1 3</sup> Mas no caso de seus deflatores implícitos globais, ela continua calculando o índice anual

<sup>1 2</sup> Ocioso salientar que se deflacionamos ambas as Partes com o mesmo deflator, estamos sendo redundantes, pois isso corresponderia a deflacionar o Todo com esse mesmo deflator.

<sup>1 3</sup> Se alguma crítica permanece, esta se deve à minha ausência de certeza de que ela agrega índices do produto real e não índices do “quantum” produzido.

como médias aritméticas ponderadas dos índices mensais. O reparo a ser feito é que devia usar médias geométricas ponderadas.

Por último, por não desejarmos encerrar aqui nossas preocupações com o tema, acreditamos que as fórmulas de agregação sugeridas neste estudo podem ser úteis para a obtenção de índices de preços e “quantum” das Partes a partir de índices de valor, preços e “quantum” do Todo e índices de valor das Partes. Esse problema tem importantes aplicações na contabilidade social, caso associemos as Partes com valor adicionado e consumo intermediário e o Todo com o valor bruto da produção setorial ou global.

## Apêndice

A maior parte dos autores da literatura sobre números índices (e.g., Allen, 1975; Fox, 1973) define os índices de Laspeyres ou Paasche como sendo uma média aritmética ponderada dos preços relativos. Isso é verdade para os índices de preços ou “quantum” de Laspeyres, ao passo que a média ponderada utilizada para a construção dos índices de Paasche é harmônica, conforme salientam Fisher (1927, passim) e Karmel & Polasek (1972, p. 397-8).

Neste Apêndice, pretendo mostrar que as fórmulas desenvolvidas no corpo deste trabalho são perfeitamente compatíveis com a visão de que os índices de Laspeyres são médias aritméticas e os índices de Paasche são médias harmônicas. Ilustrarei tal procedimento apenas para o caso dos índices de preços, uma vez que tenho a sensação de me estar alongando em demasia.

Acrescentemos, assim, aos símbolos anteriormente definidos os seguintes:

$p_t^j$  = preço da mercadoria  $j$  no ano  $t$  e

$q_t^j$  = quantidade da mercadoria  $j$  no ano  $t$ ,

em que  $t = 1, 2$

em que  $j = 1, 2, 3, \dots, n-k, n-k+1, n-k+2, \dots, n$ ,

sendo que as mercadorias  $j = 1, 2, 3, \dots, n-k$  pertencem à Parte X e que as mercadorias  $j = n-k+1, n-k+2, n-k+3, \dots, n$  pertencem à Parte Y.

Iniciando com o índice de preços de Laspeyres, sabemos que ele pode ser escrito como (conforme, por exemplo, Fox (1973), p. 138):

$$(1) \text{IPL}_t^Z = \frac{p_{t-1}^1 q_{t-1}^1}{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j} \cdot \frac{p_t^1}{p_{t-1}^1} + \frac{p_{t-1}^2 q_{t-1}^2}{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j} \cdot \frac{p_t^2}{p_{t-1}^2} + \dots + \frac{p_{t-1}^{n-k} q_{t-1}^{n-k}}{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j} \cdot \frac{p_t^{n-k}}{p_{t-1}^{n-k}} + \frac{p_{t-1}^{n-k+1} q_{t-1}^{n-k+1}}{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j} \cdot \frac{p_t^{n-k+1}}{p_{t-1}^{n-k+1}} + \dots + \frac{p_{t-1}^n q_{t-1}^n}{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j} \cdot \frac{p_t^n}{p_{t-1}^n}.$$

Multiplicando todos os termos do segundo membro por fatores unitários convenientes, a expressão acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ IPL}_t^Z &= \frac{\sum_1^{n-k} p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{1} \cdot \frac{p_{t-1}^1 q_{t-1}^1}{p_{t-1}^1 q_{t-1}^1} \cdot \frac{p_t^1}{p_t^1} + \frac{\sum_1^{n-k} p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{1} \cdot \\
 &\frac{\sum_1^{n-k} p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{1} \cdot \frac{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{1} \cdot \frac{1}{p_{t-1}^1} \cdot \frac{\sum_1^{n-k} p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{1} \cdot \\
 &\frac{p_{t-1}^2 q_{t-1}^2}{p_{t-1}^2 q_{t-1}^2} \cdot \frac{p_t^2}{p_t^2} + \dots + \frac{\sum_1^{n-k} p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{1} \cdot \frac{p_{t-1}^{n-k} q_{t-1}^{n-k}}{p_{t-1}^{n-k} q_{t-1}^{n-k}} \cdot \\
 &\frac{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{1} \cdot \frac{p_{t-1}^2 q_{t-1}^2}{p_{t-1}^2 q_{t-1}^2} \cdot \frac{\sum_1^{n-k} p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{1} \cdot \frac{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{1} \cdot \\
 &\frac{p_t^{n-k}}{p_t^{n-k}} + \frac{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{n-k+1} \cdot \frac{p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{p_{t-1}^j q_{t-1}^j} \cdot \frac{p_{t-1}^{n-k+1} q_{t-1}^{n-k+1}}{p_{t-1}^{n-k+1} q_{t-1}^{n-k+1}} \cdot \frac{p_t^{n-k+1}}{p_t^{n-k+1}} + \dots + \\
 &\frac{p_{t-1}^{n-k}}{p_{t-1}^{n-k}} \cdot \frac{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{n-k+1} \cdot \frac{p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{p_{t-1}^j q_{t-1}^j} \cdot \frac{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{1} \cdot \frac{p_{t-1}^{n-k+1}}{p_{t-1}^{n-k+1}} \cdot \\
 &+ \frac{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{n-k+1} \cdot \frac{p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{p_{t-1}^j q_{t-1}^j} \cdot \frac{p_{t-1}^n q_{t-1}^n}{p_{t-1}^n q_{t-1}^n} \cdot \frac{p_t^n}{p_t^n} \cdot \\
 &\frac{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{n-k+1} \cdot \frac{p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{p_{t-1}^j q_{t-1}^j} \cdot \frac{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{1} \cdot \frac{p_{t-1}^n}{p_{t-1}^n} \cdot
 \end{aligned}$$

Reordenando a expressão (2), temos:

$$\begin{aligned}
 (3) \text{ IPL}_t^Z &= \frac{\sum_1^{n-k} p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{1} \cdot \frac{p_{t-1}^1 q_{t-1}^1}{p_{t-1}^1 q_{t-1}^1} \cdot \frac{p_t^j}{p_t^j} + \frac{\sum_1^{n-k} p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{1} \cdot \\
 &\frac{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{1} \cdot \frac{\sum_1^{n-k} p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{1} \cdot \frac{1}{p_{t-1}^1} \cdot \frac{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{1} \cdot \\
 &\frac{p_{t-1}^2 q_{t-1}^2}{p_{t-1}^2 q_{t-1}^2} \cdot \frac{p_t^2}{p_t^2} + \frac{\sum_1^{n-k} p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{1} \cdot \frac{p_{t-1}^{n-k} q_{t-1}^{n-k}}{p_{t-1}^{n-k} q_{t-1}^{n-k}} \cdot \frac{p_t^{n-k}}{p_t^{n-k}} + \\
 &\frac{\sum_1^{n-k} p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{1} \cdot \frac{p_{t-1}^2 q_{t-1}^2}{p_{t-1}^2 q_{t-1}^2} \cdot \frac{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{1} \cdot \frac{\sum_1^{n-k} p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{1} \cdot \frac{p_{t-1}^{n-k}}{p_{t-1}^{n-k}} \cdot
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sum_{n-k+1}^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j} \cdot \frac{p_{t-1}^{n-k+1} q_{t-1}^{n-k+1}}{p_t^{n-k+1}} + \\
& + \frac{\sum_{n-k+1}^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j} \cdot \frac{p_{t-1}^n q_{t-1}^n}{p_t^n} .
\end{aligned}$$

Colocando em evidência os fatores comuns, vem

$$\begin{aligned}
(4) \text{ IPL}_t^Z &= \frac{\sum_1^{n-k} p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j} \left( \frac{p_{t-1}^1 q_{t-1}^1}{\sum_1^{n-k} p_{t-1}^j q_{t-1}^j} \cdot \frac{p_t^1}{p_{t-1}^1} + \frac{p_{t-1}^2 q_{t-1}^2}{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j} \right. \\
& \cdot \left. \frac{p_t^2}{p_{t-1}^2} + \dots + \frac{p_{t-1}^{n-k} q_{t-1}^{n-k}}{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j} \cdot \frac{p_t^{n-k}}{p_{t-1}^{n-k}} \right) + \frac{\sum_{n-k+1}^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j}{\sum_1^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j} \cdot \\
& \cdot \left( \frac{p_{t-1}^{n-k+1} q_{t-1}^{n-k+1}}{\sum_{n-k+1}^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j} \cdot \frac{p_t^{n-k+1}}{p_{t-1}^{n-k+1}} + \dots + \frac{p_{t-1}^n q_{t-1}^n}{\sum_{n-k+1}^n p_{t-1}^j q_{t-1}^j} \cdot \frac{p_t^n}{p_{t-1}^n} \right) .
\end{aligned}$$

Os termos em evidência representam, respectivamente, a participação a preços correntes do ano anterior das Partes X e Y no Todo Z, enquanto os termos entre parênteses representam — de acordo com a expressão (1) acima, “mutatis mutandis” — os índices de preços de Laspeyres das Partes X e Y. Sinoticamente,

$$(5) \text{IPL}_t^Z = A_{t-1} \cdot \text{IPL}_t^X + (1-A_{t-1}) \text{IPL}_t^Y.$$

No que diz respeito ao índice de preços de Paasche, Fox, por exemplo, também o caracteriza como sendo uma média aritmética ponderada (Fox, 1973, p. 139):

$$(6) \text{IPP}_t^Z = \frac{p_t^1 q_t^1}{\sum_1^n p_{t-1}^j q_t^j} \cdot \frac{p_t^1}{p_{t-1}^1} + \frac{p_t^2 q_t^2}{\sum_1^n p_{t-1}^j q_t^j} \cdot \frac{p_t^2}{p_{t-1}^2} + \dots + \frac{p_t^{n-k} q_t^{n-k}}{\sum_1^n p_{t-1}^j q_t^j} \cdot \frac{p_t^{n-k}}{p_{t-1}^{n-k}} + \dots + \frac{p_t^n q_t^n}{\sum_1^n p_{t-1}^j q_t^j} \cdot \frac{p_t^n}{p_{t-1}^n}.$$

Não resta dúvida de que, sob o ponto de vista matemático, a expressão (6) é uma média aritmética ponderada. Ocorre que os fatores de ponderação

$$\frac{p_t^j q_t^j}{\sum_1^n p_{t-1}^j q_t^j}$$

não têm uma interpretação econômica muito simples, uma vez que o valor monetário  $p_{t-1}^j \cdot q_t^j$  é "imaginário". Tal dificuldade não seria superada caso adotássemos um procedimento similar ao utilizado na dedução da expressão (5) deste Apêndice, já que nos depararíamos com a seguinte média aritmética ponderada dos preços das Partes:

$$(7) \text{IPP}_t^Z = \frac{\sum_1^{n-k} p_{t-1}^j q_t^j}{\sum_1^n p_{t-1}^j q_t^j} \cdot \text{IPP}_t^X + \frac{\sum_{n-k+1}^n p_{t-1}^j q_t^j}{\sum_1^n p_{t-1}^j q_t^j} \cdot \text{IPP}_t^Y.$$

Tampouco neste caso da expressão (7), os fatores de ponderação dos índices das Partes têm uma interpretação econômica teórica ou empiricamente interessante, ao contrário da expressão (XLI) que deduzimos no item 4.4.2 deste trabalho.

A dificuldade de interpretarmos as expressões (6) e (7) economicamente reside no fato de que os índices de Paasche são mais apropriadamente descritos pelo conceito matemático de média harmônica ponderada. Cabe salientar, antecipando virtuais críticas, que o adjetivo **harmônica** compromete o substantivo **média** no mesmo grau que o compromete a qualidade **aritmética**. Logo, interpretar economicamente uma e outra tem o mesmo grau de dificuldade. Acrescente-se ainda que poucos autores apresentam os índices de Paasche como sendo média harmônica. Karmel & Polasek (1972, p. 397-8) são um exemplo, ao contrário, v. g., de Allen (1975) e Fox (1973). Apesar disso, Karmel e Polasek também cometem seus pecadilhos. Ao tratarem da agregação de índices às páginas 400-2, apresentam o exemplo de obtenção de um índice de preços ao consumidor, sabidamente um índice de Laspeyres, pela agregação dos índices de preços de suas partes (os itens de despesa do consumidor). O primeiro tropeço, aqui esmiuçado, diz respeito ao fato de não alertarem o leitor que tal procedimento não é válido para índices de Paasche, a menos que se conheçam os  $p_{t-1}^j q_t^j$ . O segundo é mais preocupante, pois podemos perceber que a simples mudança do centro da escala do índice encontrado afeta sua taxa de crescimento. Mas o segundo tropeço já é outra história (ver nota 10 do presente artigo).

Vejamos, para concluir, como o procedimento adotado para a obtenção da expressão (5) "mutatis mutandis," leva a uma identidade com as expressões (5) a (7) e é mais interessante para fins analíticos. Enquanto média harmônica, o índice de preços de Paasche pode ser visto como:

$$(8) \text{IPP}_t^Z = \frac{1}{\frac{\sum_1^n \frac{p_{t-1}^j}{p_t^j} \cdot p_t^j q_t^j}{\sum_1^n p_t^j q_t^j}}$$

Desmembrando convenientemente o denominador e invertendo os dois membros,

$$(9) \frac{1}{\text{IPP}_t^Z} = \frac{1}{p_t^1 q_t^1} \cdot \frac{1}{p_{t-1}^1} + \frac{2}{p_t^2 q_t^2} \cdot \frac{2}{p_{t-1}^2} + \dots + \frac{p_t^{n-k} q_t^{n-k}}{p_t^{n-k} q_t^{n-k}} \cdot \frac{p_{t-1}^{n-k}}{p_{t-1}^{n-k}} +$$

$$+ \frac{p_t^{n-k+1} q_t^{n-k+1}}{\sum_1^n p_t^j q_t^j} \cdot \frac{p_{t-1}^{n-k+1}}{p_{t-1}^{n-k+1}} + \dots + \frac{p_t^n q_t^n}{\sum_1^n p_t^j q_t^j} \cdot \frac{p_{t-1}^n}{p_{t-1}^n}$$

Multiplicando todos os termos do lado direito por fatores unitários convenientes, e reordenando de modo adequado aos fins propostos, a expressão (9) pode ser vista como:

$$\begin{aligned}
 (10) \frac{1}{IPP_t^Z} &= \frac{\sum_1^{n-k} p_t^j q_t^j}{\sum_1^n p_t^j q_t^j} \cdot \frac{1}{p_t} \cdot \frac{1}{p_{t-1}} + \frac{\sum_1^{n-k} p_t^j q_t^j}{\sum_1^n p_t^j q_t^j} \cdot \frac{1}{p_t} \cdot \frac{1}{p_{t-1}} \\
 &\quad + \frac{p_{t-1}^2}{p_t^2} + \dots + \frac{\sum_1^{n-k} p_t^j q_t^j}{\sum_1^n p_t^j q_t^j} \cdot \frac{p_{t-1}^{n-k} q_t^{n-k}}{p_t^{n-k} q_t^{n-k}} \cdot \frac{1}{p_{t-1}^{n-k}} + \frac{\sum_1^n p_t^j q_t^j}{\sum_1^{n-k+1} p_t^j q_t^j} \\
 &\quad + \frac{p_{t-1}^2}{p_t^2} + \dots + \frac{\sum_1^n p_t^j q_t^j}{\sum_1^{n-k+1} p_t^j q_t^j} \cdot \frac{p_{t-1}^{n-k} q_t^{n-k}}{p_t^{n-k} q_t^{n-k}} \cdot \frac{1}{p_{t-1}^{n-k}} + \frac{\sum_1^n p_t^j q_t^j}{\sum_1^{n-k+1} p_t^j q_t^j} \\
 &\quad + \frac{p_{t-1}^{n-k+1} q_t^{n-k+1}}{p_t^{n-k+1} q_t^{n-k+1}} \cdot \frac{1}{p_{t-1}^{n-k+1}} + \dots + \frac{\sum_1^n p_t^j q_t^j}{\sum_1^{n-k+1} p_t^j q_t^j} \cdot \frac{p_{t-1}^n q_t^n}{p_t^n q_t^n} \\
 &\quad + \frac{p_{t-1}^n}{p_t^n}
 \end{aligned}$$

Colocando em evidência os fatores comuns, que vêm a ser  $A_t$  e  $(1-A_t)$ , percebemos que, efetuadas as adições, chegamos às notações compactas dos índices de Paasche das Partes:

$$(11) \frac{1}{IPP_t^Z} = \frac{1}{\frac{A_t}{IPP_t^X} + \frac{1-A_t}{IPP_t^Y}}$$

Naturalmente, as expressões (5) a (9) são identidades. A grande vantagem da expressão (11) sobre as demais é que com ela afastamos o gorro que embaçava nossa



visão: os números “imaginários”  $p_{t-1}^i q_t^i$  desapareceram. Trata-se de uma definição mais útil do que as demais, uma vez que é mais coerente e se insere melhor na nossa visão do mundo real, que é o grande Todo do qual não nos devemos afastar.

## Bibliografia

- ALLEN, R.G.D. (1975). **Index numbers in theory and practice**. London & Basingstoke, Macmillan. 278p.
- ALLEN, R.G.D. (1956). **Mathematical economics**. London, Macmillan. 768p.
- BACHA, Edmar Lisboa (1976). O rei da Belíndia (uma fábula para tecnocratas). In: \_\_\_\_\_. **Os mitos de uma década**; ensaios de economia brasileira. Rio de Janeiro, Paz e Terra. 175p. p. 57-61.
- BÉRNI, Duílio de Ávila (1981). Índices de preços industriais regionais: propostas e estudos. (Trabalhos apresentados no III Encontro Brasileiro de Econometria). Brasília. p. 237-53.
- BÉRNI, Duílio de Ávila (1984). Sobre o uso de deflatores no cálculo de participações de Partes em Todos. **Ensaio FEE**. Porto Alegre, 5(2):147-161.
- BURNSTEIN, M. L. (1963) — The index number problem. In: CLOWER, R. W., ed. (1969). **Monetary theory**. Harmondsworth, Middlesex, Penguin. p. 61-64.
- CHACEL, Julian Magalhães (1956). O produto agrícola a preços constantes. **Revista Brasileira de Economia**, Rio de Janeiro, Fundação Getúlio Vargas, 10 (1):71-88, mar.
- CONJUNTURA ECONÔMICA (1985). Rio de Janeiro, Fundação Getúlio Vargas, v.39, n.7, jul. p.52-3.
- FIGUEIREDO, Ferdinando de Oliveira (1981). **Introdução à contabilidade nacional**. 8.ed. Rio de Janeiro, Forense Universitária. 212p.
- FISHER, Irving (1927). **The making of index numbers**; a study of their varieties, tests and reliability. 3.ed., Boston, Houghton Mifflin. 538p.
- FOX, Karl A. (1973). **Manual de econometria**. Buenos Aires, Amorrortu. 558p.
- FRISCH, R. (1950). O problema dos números-índices. **Revista Brasileira de Estatística**. Rio de Janeiro, IBGE. 11(42):187-214, abril/junho.
- FUNDAÇÃO DE ECONOMIA E ESTATÍSTICA (1974). Considerações preliminares sobre a economia gaúcha. **Indicadores Econômicos-RS**, Porto Alegre, 2(4):111-18, out./dez.
- HORNER, F. B. (1971). Effect of grouping data on the divergence between Laspeyres and Paasche forms of quantum indexes. **Review of Income and Wealth**, New Haven, Con., International Association for Research in Income and Wealth, (3), sept. (Série 17).

- KARMEL, Peter Henry & POLASEK, M. (1972). **Estatística geral e aplicada para economistas**. São Paulo, Atlas, Universidade de São Paulo. 602p.
- NACIONES UNIDAS (1979). **Manual de cuentas nacionales a precios constantes**. Nueva York. 118p. (Informes estadísticos, serie M, nº 64).
- THEIL, H. (1954). **Linear aggregation of economic relations**. Amsterdam, North-Holland. (Contributions to Economic Analysis, VII). 206p.