Dados Práticos Auxiliares Para o Cálculo de A'reas Extra-poligonais

Hans A. Thofehrn, Cartógrafo pela Universidade
de George Washington

A avaliação de áreas extra-poligonais deve ser feita, sempre que possível, por processos de geometria analítica, restringindo-se a aplicação do planímetro às sub-figuras de contôrno irregular.

As avaliações de área pelo planímetro estão sujeitas a êrros sensíveis, acumulando imperfeições mecânicas, pessoais e sistemáticas. Dão margem a alguns dêstes êrros, fatores como: a desretificação do planímetro, imperfeição do desenho, dilatação do papel e reiteração insuficiente das leituras.

PARA O LEVANTAMENTO DE DETALHES POR IRRADIAÇÃO SÃO FORMULAS Úteis:

ÍTEM 1

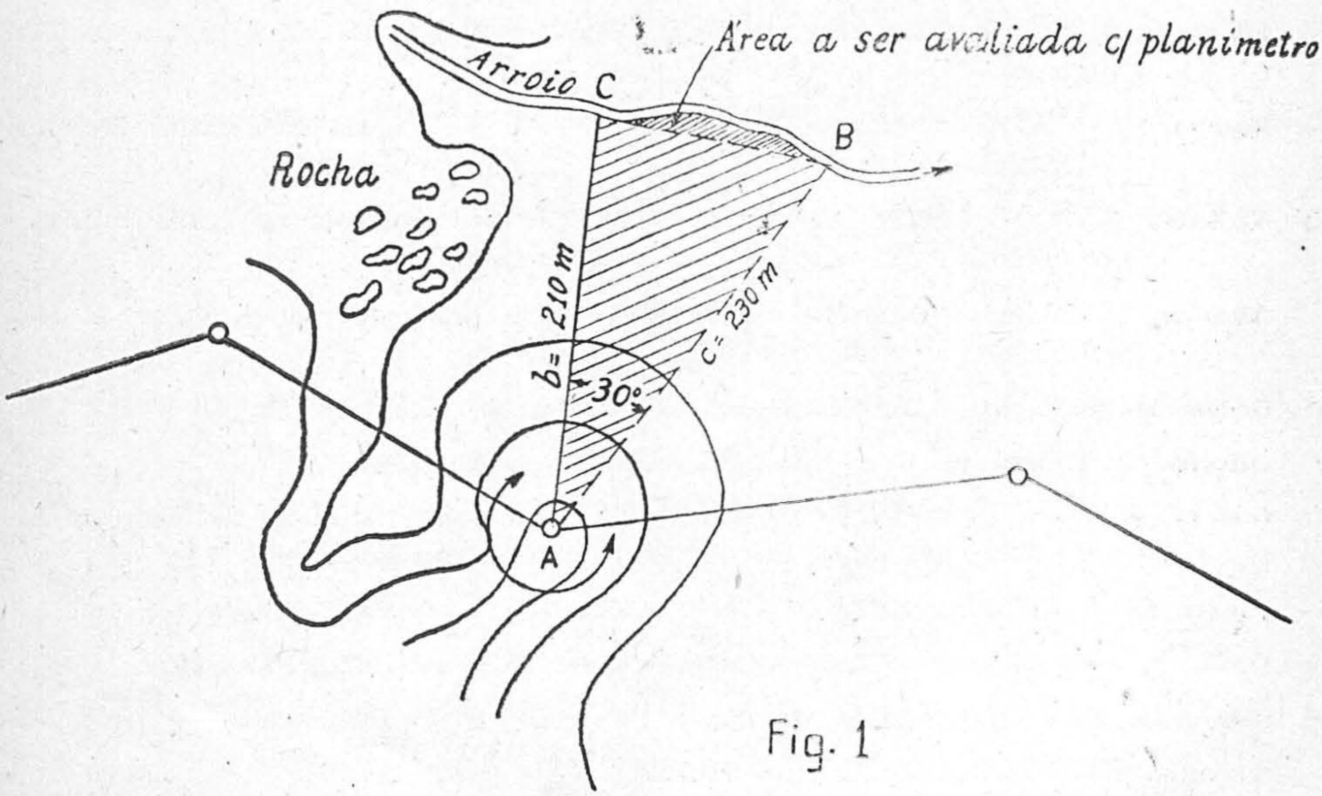

Fig. 1

Quando medidos dois lados e o ângulo compreendido; Então: A área de um triângulo é igual a metade do produto de dois lados quaisquer, multiplicado pelo seno do ângulo compreendido.

$$S = \frac{1}{2}\, b\, c \text{ sen } A$$

Exemplo: Dados dois lados e o ângulo compreendido:

$A = 30^o$ $\quad S = \frac{1}{2}$ bc sen A; $\quad S = \frac{1}{2}\, 210 \cdot 230$ sen 30^o

$b = 210m$

$c = 230m$ $\quad S = 2.4150 \cdot 0{,}50000 \quad = 1.2075$ m2

Área do triângulo A B C = 1Ha 20a 75ca

Ainda para o levantamento por irradiação:

ÍTEM 2

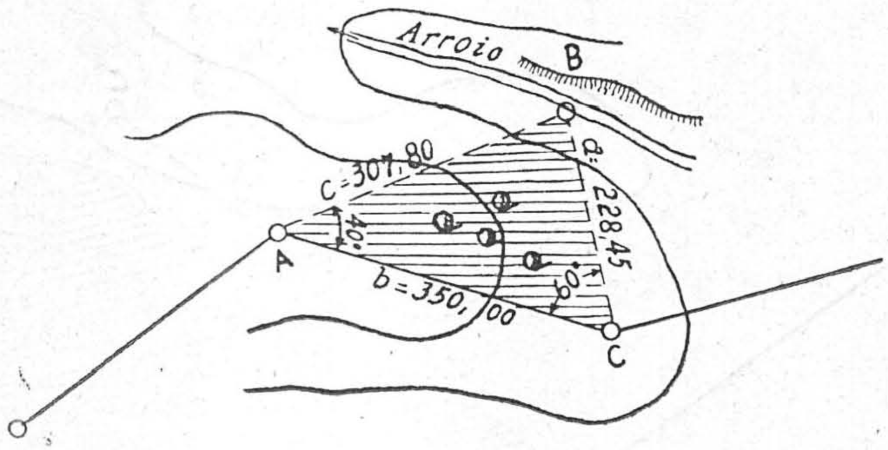

Fig. 2

Quando medidos a linha AC= b, correspondente a um lado da poligonal, os ângulos A e C e os lados c e a;

Pode ser usada a mesma fórmula do Ítem 1, calculando-se o ângulo B:

$$B = 180^{\circ} - (A+B)$$

Neste caso $S = \frac{1}{2}\, c\, a\, \operatorname{sen} B$

ou então:

Medidos os ângulos A e C e o lado (poligonal) b, (não é necessário medir c e a); utiliza-se a regra:

ÍTEM 3

A área de um triângulo é igual ao quadrado de um lado qualquer dividido por duas vêzes a soma das cotangentes dos ângulos adjacentes a êste lado.

$$S = \frac{b^2}{2(\cot A + \cot C)}$$

Exemplo: $S = \frac{b^2}{2\,(\cot A + \cot C)}; \quad \frac{(350)^2}{2\,(\cot' 40^{\circ} + \cot 60^{\circ})}$

b= 350m

A= 40°

B= 60° $\quad \frac{(350)^2}{3{,}53820} = 3\ 46\ 22\ m2$

Área do triângulo ABC = 3 Ha 46a 22ca

No caso seguinte é conveniente calcular primeiro o triângulo completado **A B C** e diminuir posteriormente o triângulo A' B' C'.

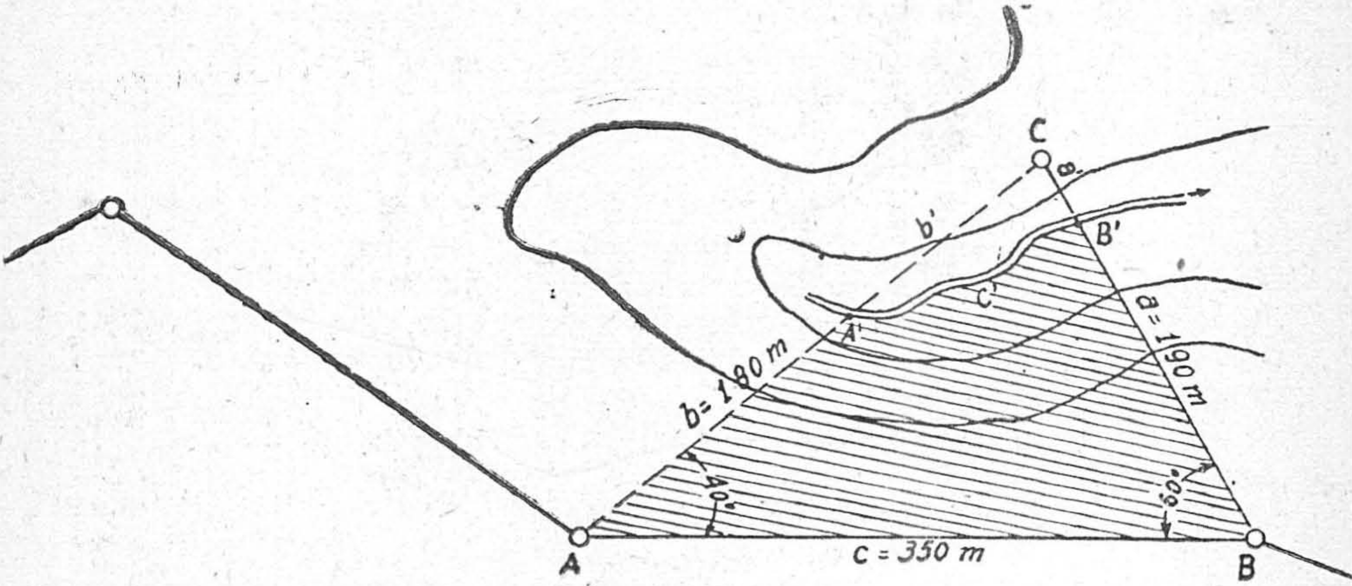

Fig. 3

O triângulo completado ABC se calcula pela fórmula do **ítem 3**.

$$S = \frac{C^2}{2(\cot A + \cot B)}$$

Para a avaliação do triângulo A'B'C é necessário calcular os lados AC=b+b' e BC=a+a'. O ângulo C é 180°—(A+B).

Os lados do triângulo A'B'C obtem-se: AC—b=b'; BC—a=a'.

A área dêste triângulo, A'B'C', se pode calcular pela fórmula do **Ítem I; no caso:**

$$S = \frac{1}{2}\, b'a' \operatorname{sen} C.$$

Deduzindo a área de A'B'C do triângulo ABC, obtem-se a área do quadrilatero A, B, A', B'.

Exemplo:

O triângulo ABC é avaliado com marcha de cálculo idêntica ao exemplo no **ítem 3**.

$$S = \frac{C^2}{2(\cot A + \cot B)} = \frac{(350)^2}{3{,}53820} = 3 \text{ Ha } 46\text{a}22\text{ca}.$$

O Cálculo dos lados AC e BC (b+b' e a+a'); é feito pela regra:

Um lado qualquer de um triângulo é igual ao módulo multiplicado pelo seno do ângulo oposto ao dito lado.

Isto é:

$$C = 350\text{m} \qquad \text{Módulo } \frac{350}{\operatorname{sen} 80^\circ}; \qquad AC = \frac{350}{\operatorname{sen} 80^\circ} \operatorname{sen} 60^\circ$$

$$A = 40^\circ \qquad B = 60^\circ \qquad BC = \frac{350}{\operatorname{sen} 80^\circ} \operatorname{sen} 40^\circ$$

$$Md = \frac{350}{0{,}98481} = 355{,}39 \qquad \left.\begin{array}{l} AC = 355{,}39 \,.\, 0{,}86603 = 307{,}80 \\ BC = 355{,}39 \,.\, 0{,}64279 = 228{,}45 \end{array}\right\} \text{aproximadamente}$$

portanto:

b' = AC—b= 307,80 — 180,00 = 127,80

a' = BC — a = 228,45 — 190,00 = 38,45

Área do triângulo CA'B' **ITEM I**

$$S = \frac{1}{2} b'a' \text{ sen } C$$

$$S = \frac{1}{2} \times 127{,}80 \cdot 38{,}45 \text{ sen } 80^{o} \qquad S = 2.456{,}95 \cdot 0{,}98481 = 2.419{,}63.$$

Área do triângulo CA'B' = OHa 24a 19ca 63 dcm2.

Área do quadrilátero A B A' B' =

3Ha 46a 22ca 00dcm2
24a 19ca 63dcm2

3Ha 22a 02ca 37dcm2

A maioria dos problemas da avaliação de áreas extra-poligonais por meio de irradiação, podem ser operadas com as fórmulas precedentes. Claro está que os exemplos apresentados são de casos especiais, uma vêz que o afastamento da poligonal do perímetro deve ser o menor possível. Distâncias como nos casos tratados, resumem-se a situações excepcionais, ditadas por dificuldades topográficas ou condições celerimétricas do levantamento.

O método usual no levantamento da área extra-poligonal é o das ordenadas levantadas da linha poligonal sôbre o perímetro.

Há, para facilidade do cálculo, conveniência que estas ordenadas sejam, sempre que se tratar de perímetros sinuosos, levantados em espaços equidistantes:

O cálculo pela regra trapezoidal estatue:

ÍTEM 4

Somam-se a metade das ordenadas extremas e tôdas as ordenadas intermediárias e multiplica-se o resultado pela distância entre as ordenadas.

$$S = \left(\frac{a + n}{2} + \Sigma h\right) d$$

Exemplo: Área de BCDE =

$$S = \left(\frac{1{,}20 + 6{,}50}{2} + 2{,}00 + 2{,}90 + 3{,}50 + 4{,}80\right) . 20 = 341{,}00 \text{ m2}$$

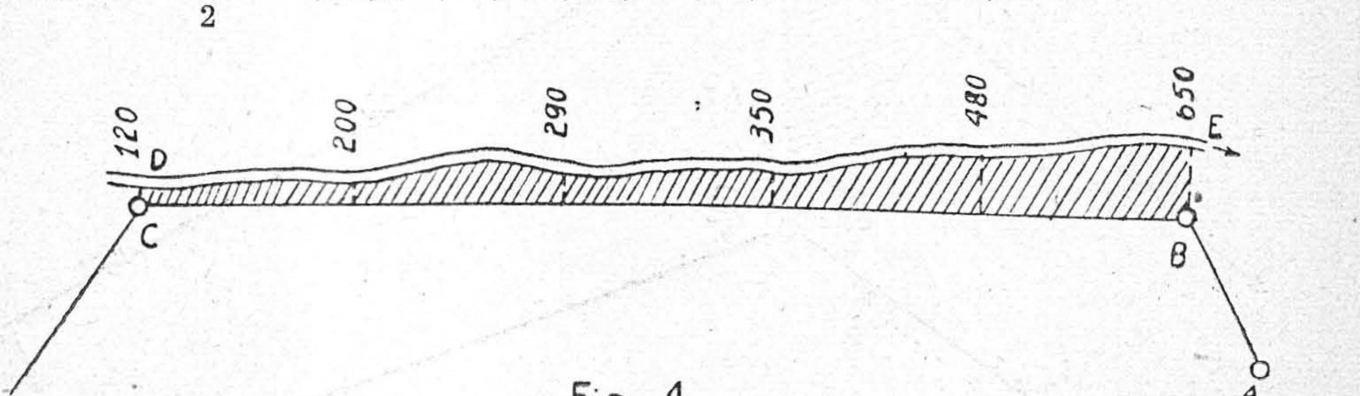

Fig. 4

Portanto: Área da figura B C D E

3a 41ca.

Maior aproximação é obtida pela fórmula de Simpson. Para a sua aplicação é necessário dividir a linha que serve base em um número par de partes iguais, adotando o seguinte critério:

Divida-se a base em um número par de partes iguais, e nos pontos de divisão levantem-se ordenadas. Numere-se as ordenadas da esquerda para a direita, somem-se as ordenadas extremas, mais quatro vêzes a soma de tôdas as ordenadas pares e duas vêzes a soma das ordenadas intermediárias ímpares: multiplique-se a soma total por um terço da distância comum entre as ordenadas consecutivas.

$$S = (a+n+4 \lessgtr h2 + 2\ h1)\ \frac{d}{3}$$

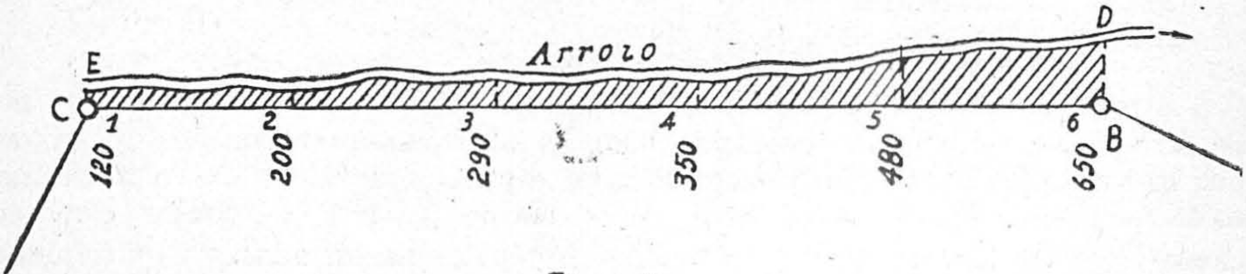

Fig. 5

Exemplo: $[1{,}20 + 6{,}50 + 4(2{,}00 + 3{,}50) + 2(2{,}90 + 4{,}80)]\ \frac{20}{3} = 301\ m2$

Área da figura = 3a01ca

Sempre que possível é de se preferir o emprêgo da fórmula de Simpson.

Nos casos de coincidência de mudança de rumo na poligonal com deflexões do perímetro ou cantos de cêrca, é de bom aviso medir os ângulos A A' e as distâncias a b e c, dividindo-se a área inscrita em dois triângulos A B C e A C D que podem ser calculados pela fórmula do **ítem 1**.

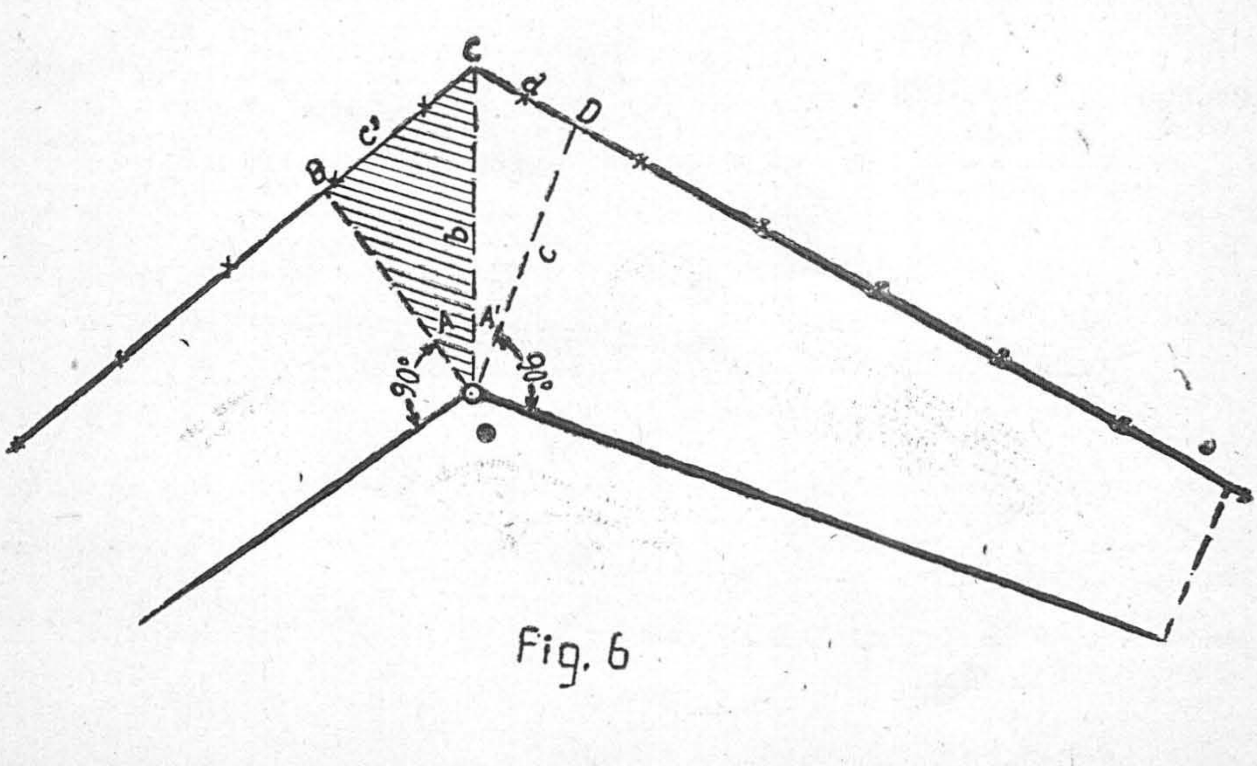

Fig. 6

$$S = \frac{1}{2} bc \text{ sen } A'; \quad S = \frac{1}{2} ab \text{ sen } A$$

Conhecendo-se, no caso, os três lados dos triângulos, (para efeito do levantamente, é aconselhável medir também c' e d) e, sendo pequeno o afastamento entre o poligono e o perímetro, pode-se empregar a fórmula comum de: onde s é a semi-soma dos lados.

$$S = \sqrt{s(s-a)\ (s-b)\ (s-c')}$$

onde S é a semi-soma dos lados.

Esta fórmula é conveniênte para ser operada com logarítmos.

Recomendam-se especialmente as topografias de Jordan, Xerez e R. Müller, onde o assunto em fóco é abordado sôbre prisma mais completo e científico.