

# LOGARITMOS

*Engenheiro Civil Curt Herrmann*

## NOTA DA REDAÇÃO:

Entre os diversos ramos da ciência geográfica, figura o da Geografia Matemática. A Geografia Matemática é de grande importância na investigação sobre a verdadeira forma da terra: na geodésia, nos levantamentos e confecção dos mapas.

A Geografia Matemática se divide em disciplinas distintas, das quais são as mais importantes:

### GEOGRAFIA MATEMÁTICA:

Astronomia

Geodésia

Planogeoidimetria\*

Topografia

Cartografia

Em todas estas disciplinas, o cálculo logarítmico ocupa papel de destaque. Notadamente a geodésia é fundamentada nas operações logarítmicas, com seus limites de erro, processos de verificação e cálculo da rede baseados nas propriedades logarítmicas.

É, portanto, de interesse para o geógrafo familiarizar-se com aquela importante auxilar da geografia matemática.

\* Ciência da construção de projeções cartográficas e graticulas.  
(também Geonomia)

## EVOLUÇÃO DO CONCEITO E DAS TÁBUAS LOGARÍTMICAS ETIMOLOGIA

A palavra "logarítmo" compõe-se de dois vocábulos gregos: logos e arithmos.

O termo LOGOS tem significação vária, de acordo com o autor que a usa e o trecho em que é aplicado. O seu verdadeiro sentido parece ser: o princípio racional do Universo! Outras vezes é usado no sentido de "Deus personificado" "O Verbo" "vontade expressa de Deus" "palavra", "conta" "proporção" Os matemáticos empregam-no neste último sentido, ou seja o de proporção.

A palavra arithmos significa "número".



Vemos assim que, segundo a etimologia, os logaritmos podem ser definidos como "números em proporção" "proporções numéricas" "proporções que se formam entre número". Falando mais especificamente, trata-se aqui de certas proporções que em álgebra tomam o nome de progressões e cujas propriedades dão aparecimento aos logaritmos.

## DESCOBERTA DOS LOGARITMOS

Na maioria dos livros didáticos aparece um cidadão Néper ou Napier como descobridor ou inventor dos logaritmos. Não queremos aqui desmerecer o valor de Sir John Napier, que contribuiu de modo mais positivo para este ramo da álgebra, mas não queremos que continue a injustiça de não serem mencionados outros tantos matemáticos que contribuíram ao estudo dos logaritmos tanto quanto o seu festejado "inventor". Como em todas as grandes invenções ou resultados de pesquisas, também não se chegou ao resultado através do trabalho de um homem somente e numa data certa, mas sim através de paciente pesquisa de diversos sábios, durante anos e até séculos. Um fato que nos faz crer no conhecimento de algo parecido com os logaritmos, já antes de Napier, é o de que este apresenta sua novidade já com o nome atualmente usado. Seria um caso raro este do "inventor" já empregar o nome que mais tarde se consagrasse, e é mais fácil supor que Napier assim os batisasse, em vista de denominações e conhecimentos anteriores já existentes.

## EVOLUÇÃO CRONOLÓGICA DOS LOGARITMOS

Sabemos que os logaritmos derivam suas propriedades de certas propriedades inerentes às progressões. Estas noções já as encontramos, de forma rudimentar, nas obras de Arquimedes, portanto há mais de 200 anos antes de Cristo. Em sua obra "Arenário" encontramos um problema onde existe uma transformação de multiplicação em soma, etc., portanto propriedades dos logaritmos. Tornamos a encontrar novamente referências às progressões na obra de Fra Luca Pacciolo (1450?—1510?) no livro intitulado "Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita—1494 — Veneza". Seu contemporâneo, Chuquet, amplia os conhecimentos sobre as progressões, descobrindo que da comparação de uma progressão aritmética com uma progressão geométrica, facilmente podemos transformar uma multiplicação em soma, uma divisão em subtração, etc. Nas progressões abaixo podemos ver:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & . & 1 & . & 2 & . & 3 & . & 4 & . & \dots \\ 1 & : & 2 & : & 4 & : & 8 & : & 16 & : & \dots \end{array}$$

que aos termos que correspondem soma na primeira progressão (aritmética), isto é somando dois termos da primeira progressão, o resultado corresponderá ao produto dos termos correspondentes da progressão geométrica que está logo abaixo.



Em 1550 Michael Stifel prolongou as progressões acima, para a esquerda, isto é, lançou a base das noções que dariam lugar à determinação dos logaritmos negativos, como pode ser deduzido das progressões abaixo:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \dots & -3 & . & -2 & . & -1 & . & 0 & . & 1 & . & 2 & . & 3 & . & 4 & \dots \\ \dots & 1/8 & : & 1/4 & : & 1/2 & : & 1 & : & 2 & : & 4 & : & 8 & : & 16 & : \dots \end{array}$$

Está desta forma lançada a base da teoria dos logaritmos. O mérito de Napier reside em coligar êstes conhecimentos, afim de construir a primeira tábua de logaritmos, isto é, aproveitar na prática estas propriedades descobertas em teoria.

John Napier (1550—1617) e não “Néper” como o querem chamar os franceses, foi barão de Merchiston, em Edinburgo—Escócia. Aqueles que gostam de falar do espírito econômico dos escoceses, afirmam que Napier conseguiu esta notável descoberta, visando “economisar cálculos” (o que de fato conseguiu.) Publicou em 1614 suas observações em um livro que intitulou “Mirifici logarithmorum canonis descriptio, ejusque usus in utraque trigonometria, ut etiam in omnis logistica mathematica, amplissimi, facillimi et expeditissimi e explicatio: authore et inventore Jeanne Nepero, barone Merchistonii, Scotorum Edinburgi, ex officina Andreae Hart, bibliopolae MDCXIV” Em português: “Descrição de uma tábua maravilhosa de logaritmos e explicação de seu uso universal, fácil e rápido, tanto na trigonometria como em outros cálculos matemáticos, por John Napier, barão de Merchiston, Edinburgo—Escócia, publicado por André Hart em 1614”. A obra contém 56 páginas de texto e 90 páginas de tábuas. É dedicada a Charles, príncipe de Gales, posteriormente rei da Inglaterra, executado em 1649. As tábuas contém apenas os logaritmos dos senos calculados de minuto em minuto com 7 e 8 casas decimais. Os logaritmos “neperianos” ou mais acertadamente “naperianos”, ligeiramente diferentes dos logaritmos naturais atuais, erroneamente chamados neperianos, pois a base apresenta pequena diferença e sua relação pode ser expressa da seguinte forma:

Seja:  $N$  — base dos logaritmos neperianos  
 $e$  — base dos logaritmos naturais

$$\log N^n = 10^7 \left\{ \log. e \left( \frac{10^7}{n} \right) \right\}$$

A teoria da construção das tábuas é a seguinte:

Sejam as duas progressões:

$$\begin{array}{ccccccccccc} :: 1 & : & (1-a) & : & (1-a)^2 & : & (1-a)^3 & : & \dots & : & (1-a)^n \\ :: 0 & . & b & . & 2b & . & 3b & . & \dots & . & nb \end{array}$$

onde “a” representa o excesso da unidade da razão da progressão geométrica e “b” a razão da progressão aritmética. Para conseguir com que na progressão geométrica constem todos os números reais e positivos, basta que façamos “a” tender para zero, isto é, tomar valores tão pequenos que a diferença entre dois termos consecutivos seja tão pequena quanto se desejar. Se “a” tende para zero,  $(1-a)$  tende para “1” e “b” tende para “0”. Se “a” e “b” tendem simultaneamente para zero, podemos fazer com que  $b/a$  conserve-se fixo e assim definir um sistema de logaritmos. Esta rela-



ção constante para cada sistema de logarithmos chama-se módulo absoluto do sistema.\* Napier considerou este módulo igual à unidade. Desta forma:

$$m = \frac{b}{a} = 1 \quad \text{ou } b = a$$

Substituindo "b" por "a" na progressão aritmética, estas duas se transformarão nas seguintes:

$$\begin{array}{ccccccc} :: 1 : (1-a) : (1-a)^2 : (1-a)^3 & \dots & (1-a)^n \\ : 0 : a : 2a : 3a & \dots & n.a \end{array}$$

que definem o sistema de logarithmos neperianos.

Para acharmos a base, basta fazermos  $n \cdot a = 1$  ou seja  $n = \frac{1}{a}$

Como o valor cujo logarithmo é a unidade, constitui a base do sistema, teremos que a base do sistema neperiano é:  $(1-a)^n$  valor este que hoje é representado pela letra "e" e que atualmente é tido como valendo 2,7182818.....

Para acharmos o valor da base basta fazer a seguinte consideração:

O valor de "a" é variável e tende para zero, logo "n" tenderá ao infinito. Substituindo os valores, teremos:  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^n$

As condições mais reduzidas dos conhecimentos algébricos da época, não permitiram que Napier chegasse a um valor mais próximo de "e", o que somente pôde ser conseguido mais tarde, com o conhecimento das séries, etc.

Após a morte de Napier, seu filho Roberto Napier, publicou as obras póstumas do pai, sob o título "Mirifici logarithmorum canonis constructio" onde se encontra a teoria da confecção das tábuas e onde reconhece que seria mais conveniente ser adotada a base "10", base decimal, como base de um sistema prático de logarithmos.

Muitos afirmam que a idéia das tábuas de logarithmos é anterior a Napier, querendo atribuir a prioridade a Joost Bürgi (1552—1632) de nacionalidade suíça. Este publicou sua obra: "Arithmetische und geometrische Progress Tabulen/sambt gründlichem unterricht/wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen/und verstanden werden sol"

Em português: "Tábuas de progressões aritméticas e geométricas/com instrução completa/do seu uso em diversos cálculos/e sua compreensão".

Esta obra foi publicada por insistência de Kepler, para quem Bürgi fabricava os instrumentos óticos e dizem os defensores deste último que referidas tábuas foram feitas muito antes das de Napier. Vê-se aqui de novo que diversos cientistas trabalharam em convergência e mesmo em paralelo, para, para o desenvolvimento destes conhecimentos.

Bürgi applicou a teoria de Napier, quase que integralmente, servindo-se de frações decimais, tomando o valor 1,0001 que elevou a todas as potências de zero a 10.000 e mais. Elaborou com isto duas séries de números, aos quais intitolou: os "números pretos" (que são os da direita) e "números vermelhos" (que são os da esquerda). Quem observa as séries abaixo, verá que à esquerda temos uma progressão aritmética e à direita uma progressão geométrica a que os números vermelhos são os logarithmos dos números pretos.



|        |                                |
|--------|--------------------------------|
| 0,0000 | $(1,0001)^0 = 1,0000000$       |
| 0,0001 | $(1,0001)^1 = 1,00010000$      |
| 0,0002 | $(1,0001)^2 = 1,00020001$      |
| 0,0003 | $(1,0001)^3 = 1,00030003$      |
| <hr/>  | <hr/>                          |
| 0,0010 | $(1,0001)^{10} = 1,00100045$   |
| <hr/>  | <hr/>                          |
| 1,0000 | $(1,0001)^{1000} = 2,71814593$ |

Vemos que a base do sistema é o número 2,71814593, valor bastante próximo da base do sistema naperiano hoje adotado. Se Bürgi tivesse tido a paciência de iniciar suas séries com o valor 1.000000001 ou 1,0000000001 teria chegado mais próximo ainda ao valor de "e" hoje adotado.

### OUTRA TABUAS DE LOGARITMOS

Henri Briggs (1556?—1631) contemporâneo e amigo de Napier, publicou, por indicação deste último, as tábuas logarítmicas com base decimal. Em 1624 publicou sua "aritmética logarítmica", onde aparecem os logaritmos decimais (mais tarde também chamados logaritmos de Briggs) onde relacionou os logaritmos dos números de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000 com 14 casas decimais. Mais tarde, em 1633 publicou nova tabua com 14 decimais dos senos naturais e seus logaritmos, para todos os centésimos de grau do primeiro quadrante, com 10 decimais as tangentes e secantes naturais e os logaritmos das tangentes. A partir desta data ficaram sendo usados na prática somente os logaritmos decimais, devido ao que se chama a "vírgula logarítmica", isto é, todos os múltiplos de dez de um mesmo número terem as mesmas mantissas, variando apenas nas características. Os logaritmos naturais continuam a ser usados em cálculos de Matemática Superior, dado sua maior facilidade de emprego neste setor.

O holandês Adrien Vlacq, publicou em 1628 uma tábua de logaritmos comuns ou decimais, preenchendo as lacunas deixadas por Briggs, isto é, os números de 20.000 a 90.000. Continha esta tábua além disto (sempre com 10 decimais) os senos, tangentes, secantes do primeiro quadrante de minuto em minuto e para os senos e tangentes mesmo de dez em dez segundos. Em 1633 publicou uma trigonometria plana e esférica intitulada "Trigonometria artificialis". De obra de Vlacq é que derivaram a quase totalidade das tábuas decimais.

John Speidell publicou em 1619 a primeira tábua de logaritmos naturais, em Londres. Esta tábua refere-se aos logaritmos dos números e não das funções circulares como Napier.

Gabriel Mouton (1618—1694) de Lyon, calculou a primeira tábua de senos e tangentes de segundo em segundo para os quatro primeiros graus. Sua obra só foi publicada em 1770, numa tábua de 7 decimais do padre Pezenas.



Sherwin em 1724, publicou as primeiras tábuas a 7 decimais dos números de 1 a 101.000, com senos, tangentes e secantes de minuto em minuto e os logarítmos dos senos. Estas tábuas foram depois ampliadas por Gardiner.

Outras tábuas de alguma projeção foram as de Callet, edição de 7 decimais, publicadas em 1795, com logaritmos dos números de 1 a 108.000. Contém ainda os senos e tangentes de segundo em segundo para os primeiros cinco gráus, e de dez em dez segundos para os demais. Foram parcialmente corrigidas por Zach, Vega, Ideler, Delambre, Bruckert, Bagay e finalmente completamente revisadas e editadas por M. Saigey. São estas edições que ainda se encontram entre nós até hoje e são bastante usadas.

Vêm a seguir as tábuas de Georg Freiherr von Vega (1756—1802) que publicou inicialmente o seu "Thesaurus logarithmorum completus" em Leipzig—1794. Estas tábuas foram trabalhadas e reeditadas com correções e adendas pelo dr. C. Bremiker no "Logarithmorum decimalium nova tabula Berolinensis. Berlim—1852" e em outras edições sucessivas.

Outras tábuas da antiguidade foram Jean C. Borda (1733—1799) "Tables decimales", Taylor—"Tables of logarithmus—1792", Ideler—"Neue trigonometrische Tafeln—Berlin—1799", Babbage — "Table of logarithms—London—1826" Bagay—"Nouvelles tables astronomiques et hydrographiques—Paris—1829"

Outros autôres de tábuas foram Köhler, Schrön, J. de Lalande Caillet, Dupuis etc.

Entre nós são usadas, além das publicações estrangeiras, já mencionadas e ainda outras mais modernas, como as tábuas do Dr. Bruhns, as edições nacionais das Tábuas Logarítmicas de FIC e FTD e as Novas tábuas logarítmicas por um grupo de professores da Livraria Francisco Alves.

---